EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 + 4z + 8 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2) On note A et B les points du plan d'affixes respectives :

$$a = 2 - 2i \quad \text{et} \quad b = -a.$$

a) Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6i$.

c) Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

3) α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α le barycentre du système :

$$\{(A, 1), (B, -1), (C, \alpha)\}.$$

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c) Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = D$?

4) On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = 4\sqrt{2}.$$

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation $z^2+4z+8=0$ est $\Delta=4^2-4\times 8=-16=(4i)^2$.
L'équation $z^2+4z+8=0$ admet donc deux racines non réelles conjuguées à savoir

$$z_1=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i \text{ et } z_2=\overline{z_1}=-2-2i.$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{-2-2i,-2+2i\}.}$$

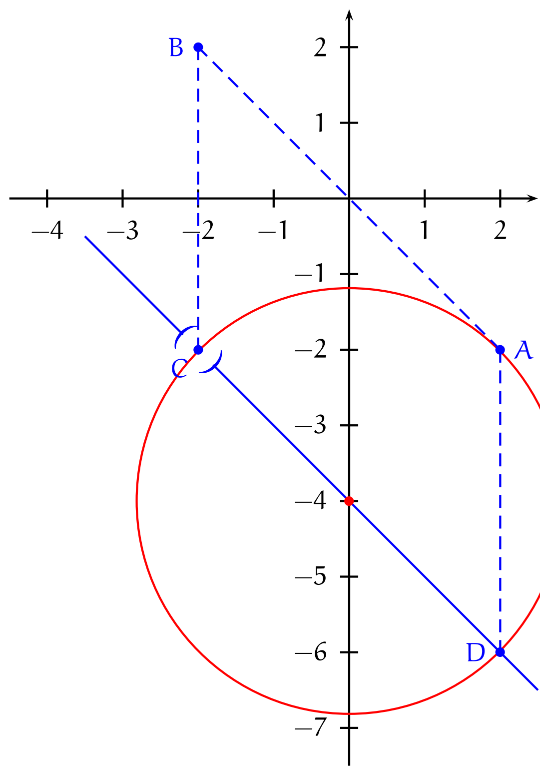
On a $|z_1|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$. Mais alors

$$z_1=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}.$$

D'autre part, $z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

$$\boxed{\mathscr{S}=\{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4},2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\}.}$$

2)



a) Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.$$

Ici, $\omega=0$ et $e^{i\theta}=e^{i\pi/2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$. Donc

$$c=ib=i(-2+2i)=-2-2i.$$

$$\boxed{c=-2-2i.}$$

b) Dans cette question $\omega = a = 2 - 2i$ et $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = i$. Donc

$$d = i(c - a) + a = i((-2 - 2i) - (2 - 2i)) + 2 - 2i = 2 - 6i.$$

$$\boxed{d = 2 - 6i.}$$

c) $a - b = a + a = 2a = 4 - 4i$ et $d - c = (2 - 6i) - (-2 - 2i) = 4 - 4i$. Donc $a - b = d - c$ ou encore $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) Soit α un réel non nul. Puisque $1 - 1 + \alpha = \alpha \neq 0$, G_α est bien défini. Ensuite, on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MG_\alpha} = \frac{1}{1 - 1 + \alpha}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{MC}\right).$$

Quand $M = C$, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}.}$$

b) Quand α décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{\alpha}$ décrit $\mathbb{R}^*$ et donc le point G_α décrit la droite passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ privée du point C ou encore, la droite (CD) privée du point C.

$$\boxed{\text{Quand } \alpha \text{ décrit } \mathbb{R}^*,\ G_\alpha \text{ décrit la droite } (CD) \text{ privée du point } C.}$$

c) Quand $\alpha = 1$, on obtient $\overrightarrow{CG_1} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et donc

$$\boxed{G_1 = D.}$$

4) Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1 - 1 + 2)\overrightarrow{MG_2} = 2\overrightarrow{MG_2}$ et donc

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG_2}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow MG_2 = 2\sqrt{2}.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G_2 et de rayon $2\sqrt{2}$. Maintenant, d'après la question 3)a), $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et donc G_2 est le milieu du segment $[CD]$. D'autre part,

$$CD = |d - c| = |4 - 4i| = 4|1 - i| = 4\sqrt{1^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{2},$$

et donc $2\sqrt{2} = \dfrac{CD}{2}$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre le milieu de $[CD]$ et de rayon $\dfrac{CD}{2}$ ou encore

$$\boxed{\text{l'ensemble cherché est le cercle de diamètre } [CD].}$$

