EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation $z^2+4z+8=0$ est $\Delta = 4^2-4\times 8 = -16 = (4i)^2$.
L'équation $z^2+4z+8=0$ admet donc deux racines non réelles conjuguées à savoir

$$z_1 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = -2-2i.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-2-2i, -2+2i\}.}$$

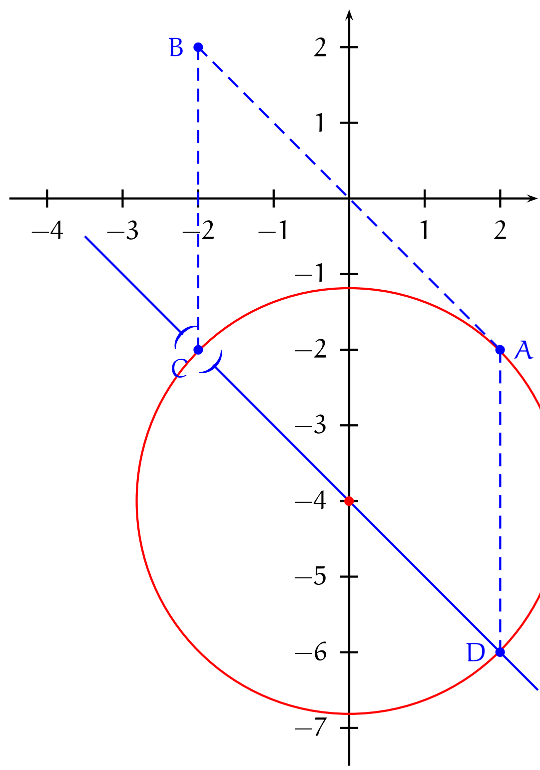
On a $|z_1| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{2^2\times 2} = 2\sqrt{2}$. Mais alors

$$z_1 = -2+2i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}.$$

D'autre part, $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}, 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}\}.}$$

2)



a) Soient θ un réel et Ω un point dont l'affixe est notée ω. L'expression complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega.$$

Ici, $\omega = 0$ et $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$. Donc

$$c = ib = i(-2+2i) = -2-2i.$$

$$\boxed{c = -2-2i.}$$

b) Dans cette question $\omega = a = 2-2i$ et $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = i$. Donc

$$d = i(c-a)+a = i((-2-2i)-(2-2i))+2-2i = 2-6i.$$

$$\boxed{d = 2-6i.}$$

c) $a-b = a+a = 2a = 4-4i$ et $d-c = (2-6i)-(-2-2i) = 4-4i$. Donc $a-b = d-c$ ou encore $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) Soit α un réel non nul. Puisque $1-1+\alpha = \alpha \neq 0$, G_α est bien défini. Ensuite, on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MG_\alpha} = \frac{1}{1-1+\alpha}\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{MC}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\overrightarrow{BA} + \alpha\overrightarrow{MC}\right).$$

Quand $M = C$, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{CG_\alpha} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{BA}.}$$

b) Quand α décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{\alpha}$ décrit $\mathbb{R}^*$ et donc le point G_α décrit la droite passant par le point C et de vecteur directeur $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ privée du point C ou encore, la droite (CD) privée du point C.

$$\boxed{\text{Quand } \alpha \text{ décrit } \mathbb{R}^*,\ G_\alpha \text{ décrit la droite } (CD) \text{ privée du point } C.}$$

c) Quand $\alpha = 1$, on obtient $\overrightarrow{CG_1} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et donc

$$\boxed{G_1 = D.}$$

4) Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1-1+2)\overrightarrow{MG_2} = 2\overrightarrow{MG_2}$ et donc

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG_2}\right\| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow MG_2 = 2\sqrt{2}.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre G_2 et de rayon $2\sqrt{2}$. Maintenant, d'après la question 3)a), $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et donc G_2 est le milieu du segment $[CD]$. D'autre part,

$$CD = |d-c| = |4-4i| = 4|1-i| = 4\sqrt{1^2+(-1)^2} = 4\sqrt{2},$$

et donc $2\sqrt{2} = \dfrac{CD}{2}$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre le milieu de $[CD]$ et de rayon $\dfrac{CD}{2}$ ou encore

$$\boxed{\text{l'ensemble cherché est le cercle de diamètre } [CD].}$$

