EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + \mathrm{i}$, $3 - \mathrm{i}$ et 2.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M.

1) Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.

2) Calculer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B.
Que remarque-t-on ?

3) Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5.

4) a) Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.

b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et, lorsque z est différent de 2, une relation entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.

c) Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2 ?

5) Soient E le point d'affixe $2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E.

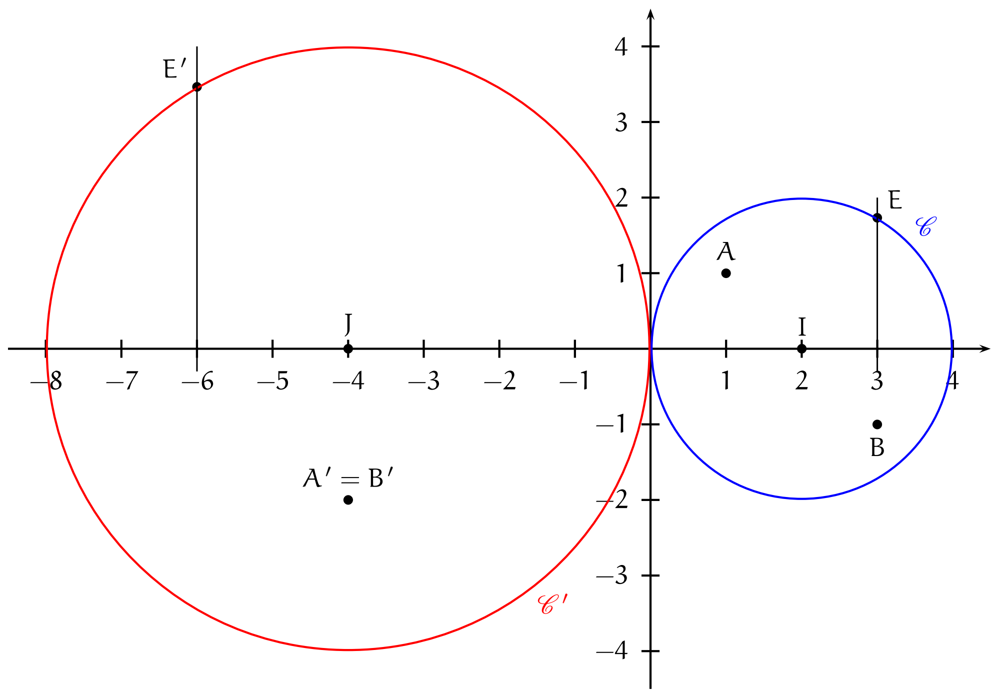
a) Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{IE}\right)$.

b) Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{JE'}\right)$.

c) Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

EXERCICE 4

1)



2) $z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1+i) = 1 + 2i - 1 - 4 - 4i = -4 - 2i$.
$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3-i)^2 - 4(3-i) = 9 - 6i - 1 - 12 + 4i = -4 - 2i$.
On note que $z_{A'} = z_{B'}$ ou encore que les points A et B ont même image.

$$\boxed{z_{A'} = z_{B'} = -4 - 2i.}$$

3) Soit z un nombre complexe.

$$z' = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (E).$$

Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir les nombres $z_1 = \dfrac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 - i$.

$$\boxed{\text{Les points d'image le point d'affixe } -5 \text{ sont les points d'affixe } 2+i \text{ et } 2-i.}$$

4) **a)** Soit z un nombre complexe. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$.

b) Par suite, $|z' + 4| = |(z-2)^2| = |z-2|^2$. D'autre part, si $z \neq 2$ alors $z - 2 \neq 0$ et $z' + 4 \neq 0$ et de plus, $\arg(z'+4) = \arg((z-2)^2) = 2\arg(z-2)\ [2\pi]$.

c) Soit M un point du plan.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 = 4 \Leftrightarrow |z'+4| = 4 \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}',$$

où $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre le point J d'affixe -4 et de rayon 4. On note que $J = I'$.

$$\boxed{\text{Quand M décrit } \mathscr{C}, \text{ M}' \text{ décrit le cercle } \mathscr{C}' \text{ de centre le point d'affixe } -4 \text{ et de rayon } 4.}$$

5) **a)** $z_E - z_I = (2 + 2e^{i\pi/3}) - 2 = 2e^{i\pi/3}$ et donc $IE = |z_E - z_I| = 2$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{IE}\right) = \arg(z_E - z_I) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{IE = 2 \text{ et } \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{IE}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi].}$$

b) D'après la question 4)b), $JE' = |z' + 4| = |z - 2|^2 = 4$ et $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{JE'}\right) = \arg(z_{E'} - z_J) = 2\arg(z_E - z_I) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

$$\boxed{JE' = 4 \text{ et } \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{JE'}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi].}$$

c) Voir graphique.

