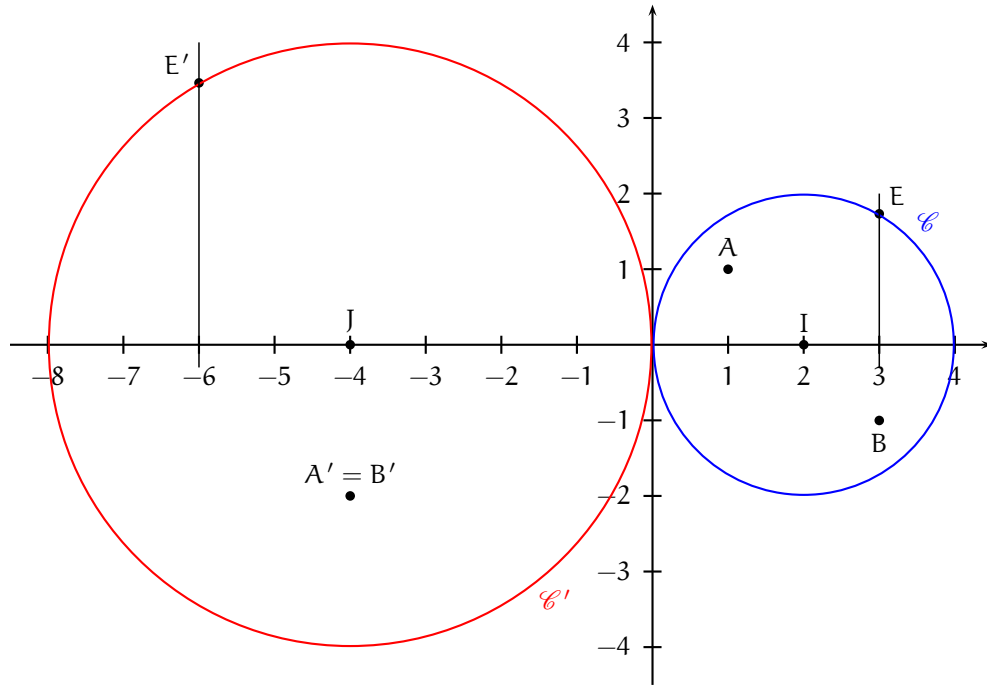


EXERCICE 4

1)



2) $z_{A'} = z_A^2 - 4z_A = (1+i)^2 - 4(1+i) = 1+2i-1-4-4i = -4-2i.$

$z_{B'} = z_B^2 - 4z_B = (3-i)^2 - 4(3-i) = 9-6i-1-12+4i = -4-2i.$

On note que $z_{A'} = z_{B'}$, ou encore que les points A et B ont même image.

$$z_{A'} = z_{B'} = -4 - 2i.$$

3) Soit z un nombre complexe.

$$z' = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (E).$$

Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 = (2i)^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir les nombres $z_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-i.$

Les points d'image le point d'affixe -5 sont les points d'affixe $2+i$ et $2-i.$

4) a) Soit z un nombre complexe. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2.$

b) Par suite, $|z' + 4| = |(z-2)^2| = |z-2|^2.$ D'autre part, si $z \neq 2$ alors $z-2 \neq 0$ et $z' + 4 \neq 0$ et de plus, $\arg(z' + 4) = \arg((z-2)^2) = 2\arg(z-2) [2\pi].$

c) Soit M un point du plan.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 = 4 \Leftrightarrow |z' + 4| = 4 \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}',$$

où \mathcal{C}' est le cercle de centre le point J d'affixe -4 et de rayon $4.$ On note que $J = I'.$

Quand M décrit $\mathcal{C},$ M' décrit le cercle \mathcal{C}' de centre le point d'affixe -4 et de rayon $4.$

5) a) $z_E - z_I = (2 + 2e^{i\pi/3}) - 2 = 2e^{i\pi/3}$ et donc $IE = |z_E - z_I| = 2$ et $(\vec{u}; \vec{IE}) = \arg(z_E - z_I) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

$$IE = 2 \text{ et } (\vec{u}; \vec{IE}) = \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

b) D'après la question 4)b), $JE' = |z' + 4| = |z - 2|^2 = 4$ et $(\vec{u}; \vec{JE'}) = \arg(z_{E'} - z_J) = 2\arg(z_E - z_I) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

$$JE' = 4 \text{ et } (\vec{u}; \vec{JE'}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

c) Voir graphique.