EXERCICE 1 (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 3 - 2i$, $b = 3 + 2i$, $c = 4i$.

2. Faire une figure et placer les points A, B, C.
3. Montrer que OABC est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω, centre du parallélogramme OABC.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$.
6. Soit M un point de la droite (AB). On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M.

   On note N l'image du point M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

   b) Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

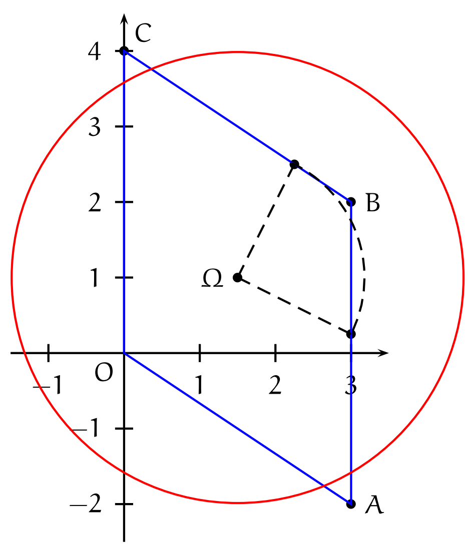
1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2.$$

$\Delta < 0$ et donc l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $\dfrac{6-4i}{2}$ ou encore $3-2i$ et $\overline{3-2i} = 3+2i$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 6z + 13 = 0 \text{ sont les nombres } a = 3-2i \text{ et } b = 3+2i.}$$

2.



3. $z_{\overrightarrow{OA}} = a = 3-2i$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c = (3+2i) - 4i = 3-2i$. Donc $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère OABC est un parallélogramme.}}$$

4. Ω est le milieu de la diagonale [OB] et donc $z_\Omega = \dfrac{0+b}{2} = \dfrac{3}{2} + i$.

$$\boxed{z_\Omega = \frac{3}{2} + i.}$$

5. Notons (E) l'ensemble considéré. D'après le théorème du barycentre partiel, $\text{bar}(O(1), A(1), B(1), C(1)) = \text{bar}(O(1), B(1), A(1), C$
$\text{bar}(\Omega(2), \Omega(2)) = \Omega$. Ω est donc l'isobarycentre du parallélogramme $OABC$ et on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{M\Omega}.$$

Soit M un point du plan.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow M\Omega = 3.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ est le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6. a) L'abscisse de M est 3 et son ordonnée est β. Donc $z_M = 3 + \beta i$. Ensuite

$$\begin{aligned} z_N &= e^{i\pi/2}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i(3 + \beta i - (\frac{3}{2} + i)) + \frac{3}{2} + i = i(\frac{3}{2} + (-1+\beta)i) + \frac{3}{2} + i = \frac{3}{2}i - (-1+\beta) + \frac{3}{2} + i \\ &= \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Le point N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b) On a vu que le vecteur $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $3 - 2i$. D'autre part,

$$z_{\overrightarrow{CN}} = z_N - c = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} N \in (BC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \beta & 3 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\frac{5}{2} - \beta) + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2\beta + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

N appartient à la droite (BC) si et seulement si $\beta = \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, le point M a pour coordonnées $(3, \frac{1}{4})$ et le point N a pour coordonnées $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$.

