

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

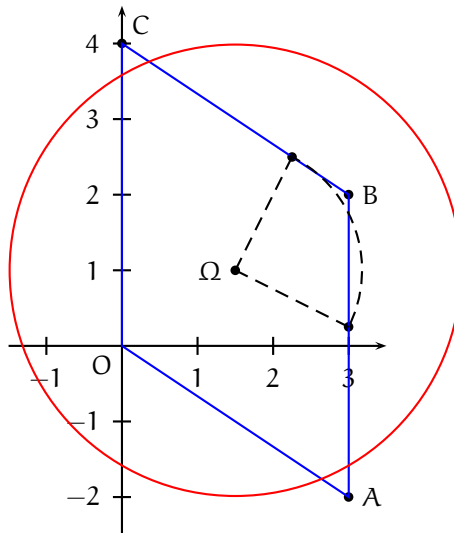
1. Le discriminant de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ est

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 13 = 36 - 52 = -16 = (4i)^2.$$

$\Delta < 0$ et donc l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $\frac{6-4i}{2}$ ou encore $3-2i$ et $\overline{3-2i} = 3+2i$.

Les solutions de l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$ sont les nombres $a = 3 - 2i$ et $b = 3 + 2i$.

2.



3. $z_{\overrightarrow{OA}} = a = 3 - 2i$ et $z_{\overrightarrow{CB}} = b - c = (3 + 2i) - 4i = 3 - 2i$. Donc $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{CB}}$ ou encore $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$. On en déduit que

le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

4. Ω est le milieu de la diagonale [OB] et donc $z_{\Omega} = \frac{0+b}{2} = \frac{3}{2} + i$.

$$z_{\Omega} = \frac{3}{2} + i.$$

5. Notons (E) l'ensemble considéré. D'après le théorème du barycentre partiel, $\text{bar}(O(1), A(1), B(1), C(1)) = \text{bar}(O(1), B(1), A(1), C(1))$, $\text{bar}(\Omega(2), \Omega(2)) = \Omega$. Ω est donc l'isobarycentre du parallélogramme OABC et on sait que pour tout point M du plan on a

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{M\Omega}.$$

Soit M un point du plan.

$$M \in (E) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow 4\|\overrightarrow{M\Omega}\| = 12 \Leftrightarrow M\Omega = 3.$$

L'ensemble des points M du plan tel que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ est le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6. a) L'abscisse de M est 3 et son ordonnée est β . Donc $z_M = 3 + \beta i$. Ensuite

$$\begin{aligned} z_N &= e^{i\pi/2}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i(3 + \beta i - (\frac{3}{2} + i)) + \frac{3}{2} + i = i(\frac{3}{2} + (-1 + \beta)i) + \frac{3}{2} + i = \frac{3}{2}i - (-1 + \beta) + \frac{3}{2} + i \\ &= \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i. \end{aligned}$$

Le point N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b) On a vu que le vecteur \overrightarrow{CB} a pour affixe $3 - 2i$. D'autre part,

$$z_{\overrightarrow{CN}} = z_N - c = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} N \in (BC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \beta & 3 \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\frac{5}{2} - \beta) + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow -5 + 2\beta + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

N appartient à la droite (BC) si et seulement si $\beta = \frac{1}{4}$.

Dans ce cas, le point M a pour coordonnées $(3, \frac{1}{4})$ et le point N a pour coordonnées $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$.