EXERCICE 2

Partie A. *Démonstration de cours.*

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

• Si $M = \Omega$ alors $z = \omega$, puis $M' = \Omega$ et $z' = \omega$. Dans ce cas on a bien $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et M' est le point du plan tel que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$. Mais alors d'après le premier pré-requis donné par l'énoncé

$$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right)\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument α c'est-à-dire le nombre $e^{i\theta}$ d'après le deuxième prérequis.

On a ainsi montré que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ ou encore que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Ce dernier résultat est donc vrai dans tous les cas et on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ d'affixe } z,\ z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega).}$$

Partie B.

1) a. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. Puis,

• $z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-5i\pi/6}$,

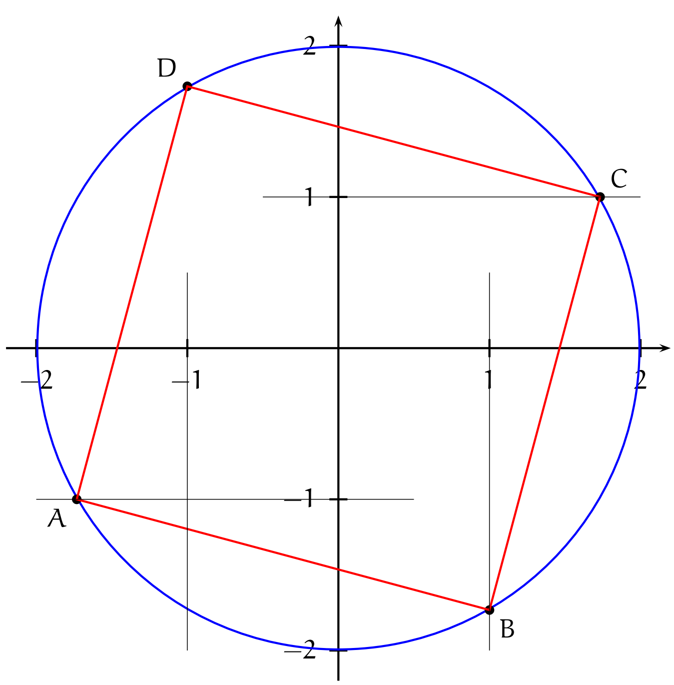
• $z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\pi/3}$,

• $z_C = -z_A = e^{i\pi} \times 2e^{-5i\pi/6} = 2e^{i\pi/6}$,

• $z_D = -z_B = e^{i\pi} \times 2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$.

$$\boxed{z_A = 2e^{-5i\pi/6},\ z_B = 2e^{-i\pi/3},\ z_C = -z_A = 2e^{i\pi/6} \text{ et } z_D = -z_B = 2e^{2i\pi/3}.}$$

b.



Les quatre points A, B, C et D sont sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2.

Le point A est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = -1$ dont l'abscisse est négative.

Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $x = 1$ dont l'ordonnée est négative.

Le point C est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = 1$ dont l'abscisse est positive.

Le point D est le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $x = -1$ dont l'ordonnée est positive.

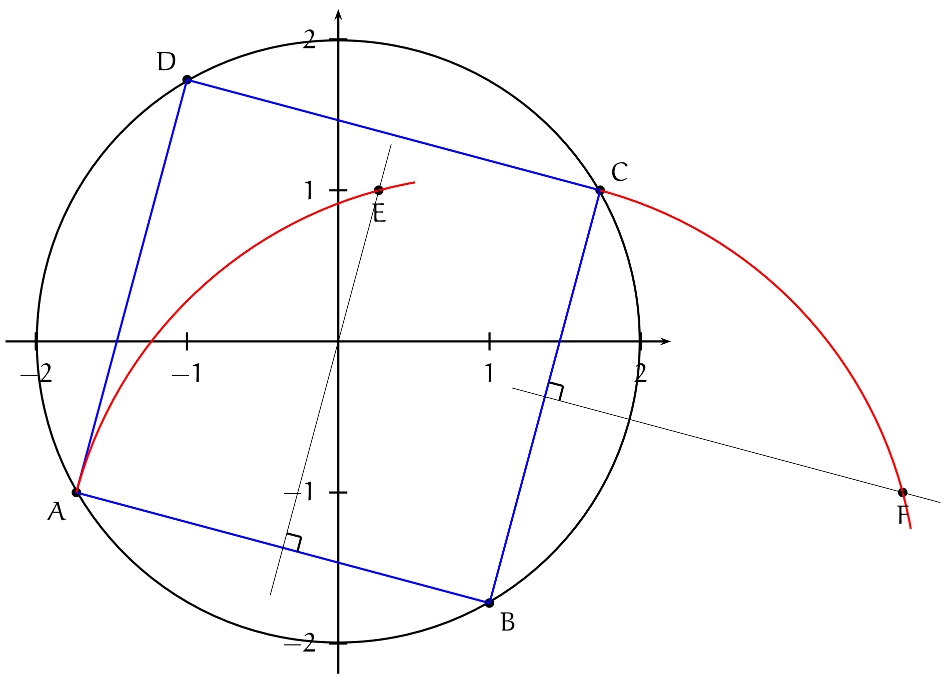
c. 1 ère solution. • On a $z_C = -z_A$ et $z_D = -z_B$ ou encore $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2} = 0$. Ainsi, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu à savoir O. Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme de centre O.
• $[AC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ et donc le triangle ADC est rectangle en D. Ainsi, le parallélogramme $ABCD$ a un angle droit et donc ce parallélogramme est un rectangle.
• $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \sqrt{3} \times (-2) + 2 \times \sqrt{3} = 0$ et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires. Le quadrilatère $ABCD$ est aussi un losange.

En résumé le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle et un losange et donc un carré.

2 ème solution. On a $z_B = iz_A$, $z_C = iz_B$, $z_D = iz_C$ (et $z_A = iz_D$). Puisque $i = e^{i\pi/2}$, si r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, $B = r(A)$, $C = r(B)$, $D = r(C)$ (et $A = r(D)$). Le quadrilatère $ABCD$ est ainsi la réunion de quatre triangles rectangles isocèles en O et encore une fois

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré.}}$$

2) a. E est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Par suite, le triangle BAE est équilatéral indirect. Le point E est donc sur le cercle de centre B passant par A et sur la médiatrice de $[AB]$ en tournant dans le sens indirect. De même, le point F est sur le cercle de centre B passant par C et sur la médiatrice de $[AC]$ en tournant dans le sens indirect.



b. L'écriture complexe de r est

$$z' = e^{-i\pi/3}(z - 2e^{-i\pi/3}) + 2e^{-i\pi/3} = e^{-i\pi/3}z - 2e^{-2i\pi/3} + 2e^{-i\pi/3}$$
$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - (-1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2.$$

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2.}$$

c. $z_E = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i) + 2 = \dfrac{(1 - i\sqrt{3})(-\sqrt{3} - i)}{2} + 2 = 2 - \sqrt{3} + i.$

$$\boxed{z_E = 2 - \sqrt{3} + i.}$$

