EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C. Alors

$$\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi).$$

2. Soit z un nombre complexe et α un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

1. **a.** Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes z_A,z_B, z_C et z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points E et F dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.