EXERCICE 4

1) Soit θ un réel. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z' = e^{i\theta}z$. Donc

$$z_B = e^{2i\pi/3} \times z_A = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi/3} = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1,$$

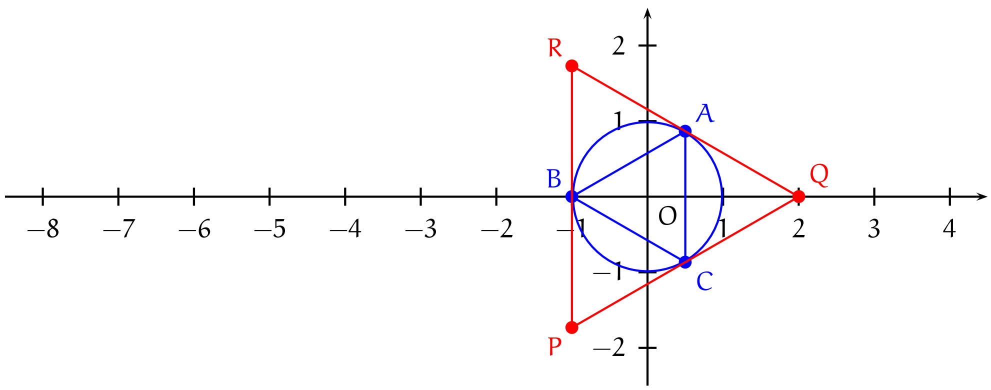
et

$$z_C = e^{2i\pi/3} \times z_B = e^{2i\pi/3} \times e^{i\pi} = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{z_B = e^{i\pi} = -1 \text{ et } z_C = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

2) a) On sait que pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$. Donc $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ ou encore $OA = OB = OC = 1$. Donc A, B et C sont sur le cercle $(\mathscr{C})$ ou encore

$$\boxed{(\mathscr{C}) \text{ est le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$



b) Puisque $B = r_{O,2\pi/3}(A)$ et $C = r_{O,2\pi/3}(B)$, les trois triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O, d'angle au sommet $\frac{2\pi}{3}$. Donc les 6 angles $\widehat{BAO}$, $\widehat{ABO}$, $\widehat{CAO}$, $\widehat{ACO}$, $\widehat{BCO}$ et $\widehat{CBO}$ sont tous égaux à $\frac{\pi}{6}$. Mais alors, les trois angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ et par suite

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est équilatéral.}}$$

3) a) Voir figure ci-dessus.

b) L'image d'un triangle équilatéral par une homothétie est un triangle équilatéral et donc

$$\boxed{\text{le triangle } PQR \text{ est équilatéral.}}$$

4) a) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport k est $z' = kz$. Ici, $k = -2$ et donc

$$\boxed{\text{l'écriture complexe de } h \text{ est } z' = -2z.}$$

b) Le triangle ABC est équilatéral de centre O. En particulier, O est le centre de gravité du triangle ABC. On en déduit que $\frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0$ et donc que

$$\boxed{z_A + z_B + z_C = 0.}$$

Maintenant, d'après la question a), on a $z_Q = -2z_B$ et $z_R = -2z_C$. Par suite,

$$\frac{z_Q + z_R}{2} = \frac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C = z_A,$$

et donc

$$\boxed{A \text{ est le milieu du segment } [QR].}$$

c) Par suite, le droite (AP) est la médiane issue de P du triangle équilatéral PQR. On en déduit que la droite (AP) est aussi la médiatrice du segment $[QR]$ et en particulier que la droite (AP) est perpendiculaire à la droite (QR). Maintenant, puisque $P = h(A)$, les points P, O et A sont alignés et donc la droite (AP) est encore la droite (OA).
En résumé, le rayon $[OA]$ est perpendiculaire en A à la droite (QR) et on sait alors que

$$\boxed{\text{la droite } (QR) \text{ est tangente au cercle } (\mathscr{C}) \text{ en } A.}$$

