Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$;
unité graphique : 4cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2+i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a) Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O;\vec{u}\right)$.

   b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
   Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$.

   a) Calculer le nombre complexe $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.

   b) Interpréter géométriquement un argument du nombre $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
   La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a) Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b) Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

   a) Déterminer l'affixe du point M'.

   b) Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

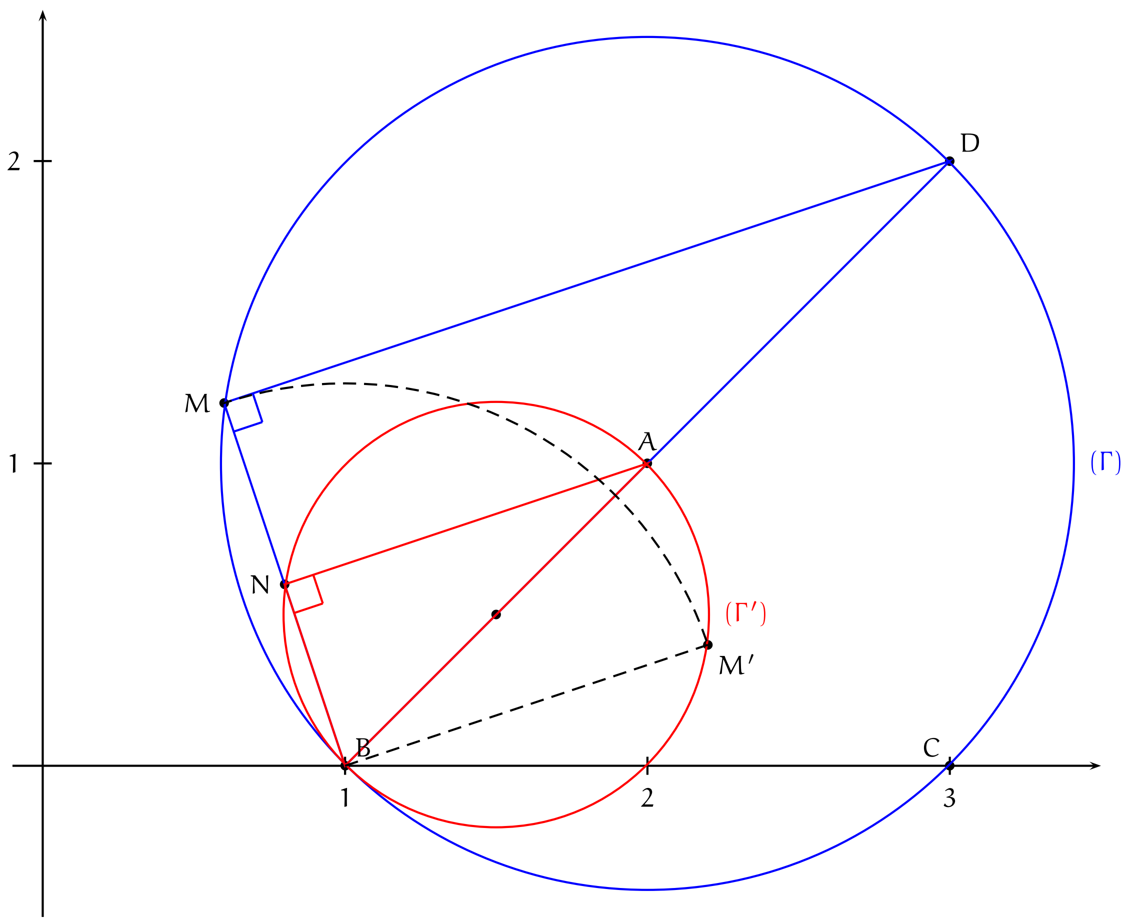
- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

1.



2. a) Une équation du cercle (Γ) est $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (O, \overrightarrow{u}) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ (x-2)^2 + (0-1)^2 = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ (x-2)^2 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x-2 = 1 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x-2 = -1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O, \overrightarrow{u})$ sont les points B et C d'affixes $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

b) D est le symétrique de B par rapport à A et donc $\dfrac{z_B + z_D}{2} = z_A$ ou encore $z_D = 2z_A - z_B = 2(2+i) - 1 = 3 + 2i$.

$$\boxed{z_D = 3 + 2i.}$$

3. **a)**

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(3+2i) - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)}{1 - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i} = \frac{6+2i}{1-3i} = \frac{2i(1-3i)}{1-3i} = 2i.$$

$$\boxed{\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2i.}$$

b) Puisque $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} \neq 0$, on sait que $\arg\left(\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right)$. On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi, le triangle BMD est rectangle en M. M est appartient donc au cercle de diamètre [BD] c'est-à-dire au cercle (Γ).

$$\boxed{\text{Le point } M \text{ appartient au cercle } (\Gamma).}$$

4. **a)** Le point N est sur le cercle (Γ') et donc la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (MB) de même que la droite (DM). On en déduit que

$$\boxed{\text{les droites } (DM) \text{ et } (AN) \text{ sont parallèles.}}$$

b) Dans le triangle MBD, le point A est le milieu du côté [BD] et puisque la droite (AN) est parallèle au côté $[DM]$, on en déduit que N est le milieu du segment $[BM]$. Mais alors,

$$z_N = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i + 1\right) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\boxed{z_N = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

5. **a)** L'expression complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est $z' = e^{-i\pi/2}(z - z_B) + z_B$ ou encore $z' = -i(z-1) + 1$ ou enfin $z' = -iz + 1 + i$. Par suite,

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) + 1 + i = -\frac{3}{5}i + \frac{6}{5} + 1 + i = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\boxed{z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.}$$

b) On a $A(2,1)$, $B(1,0)$ et $M'\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$ et donc $\overrightarrow{M'A}\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ et $\overrightarrow{M'B}\left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ puis

$$\overrightarrow{M'A}.\overrightarrow{M'B} = \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0.$$

Ainsi, le triangle $AM'B$ est rectangle en M' et donc le point M' appartient au cercle de diamètre [AB] c'est-à-dire au cercle (Γ').

$$\boxed{\text{Le point } M' \text{ appartient au cercle } (\Gamma').}$$

