BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2008

MATHEMATIQUES

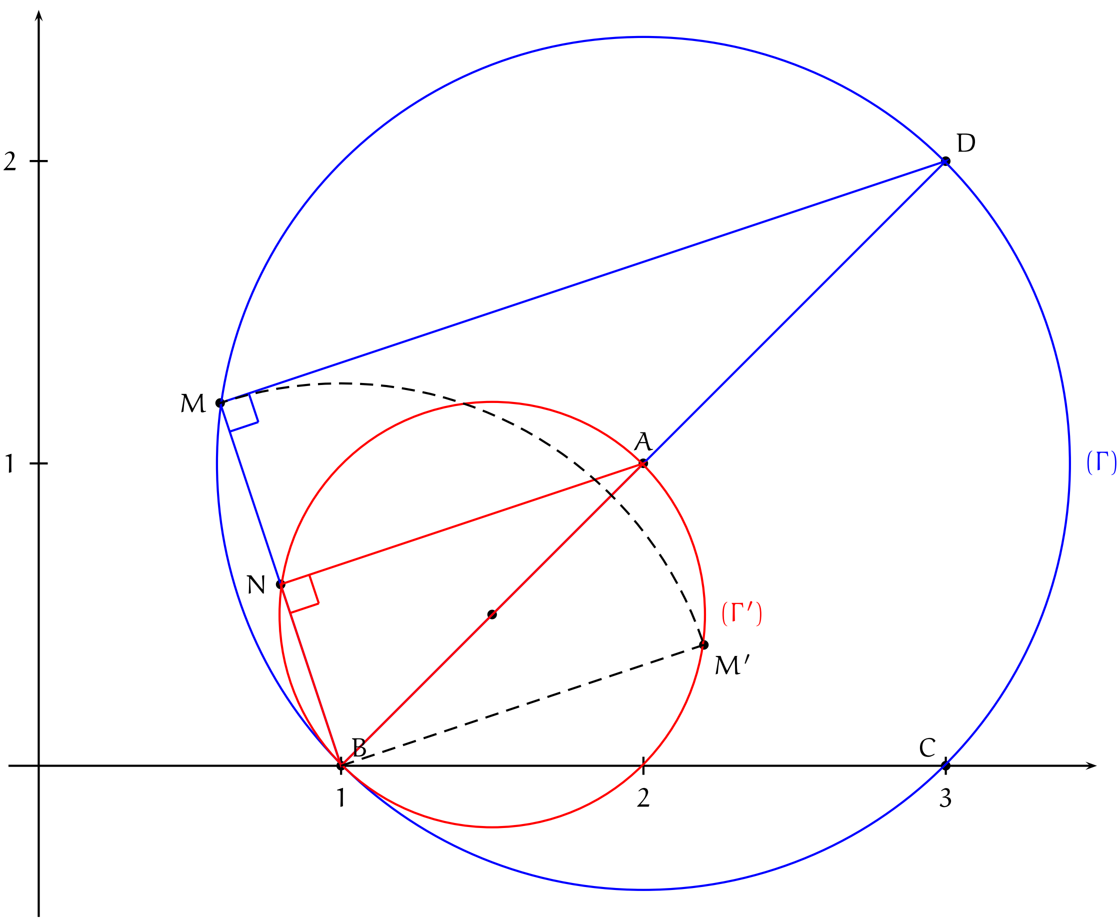
- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

1.



2. a) Une équation du cercle (Γ) est $(x-2)^2+(y-1)^2=2$. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in (O,\vec{u}) \cap (\Gamma) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ (x-2)^2+(0-1)^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ (x-2)^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x-2=1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x-2=-1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=3 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O,\vec{u})$ sont les points B et C d'affixes $z_B=1$ et $z_C=3$.

b) D est le symétrique de B par rapport à A et donc $\dfrac{z_B+z_D}{2}=z_A$ ou encore $z_D=2z_A-z_B=2(2+i)-1=3+2i$.

$$\boxed{z_D=3+2i.}$$

3. a)

$$\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(3+2i) - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)}{1 - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i} = \frac{6+2i}{1-3i} = \frac{2i(1-3i)}{1-3i} = 2i.$$

$$\boxed{\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2i.}$$

b) Puisque $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} \neq 0$, on sait que $\arg\left(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right)$. On en déduit que

$$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$

Ainsi, le triangle BMD est rectangle en M. M est appartient donc au cercle de diamètre $[BD]$ c'est-à-dire au cercle (Γ).

$$\boxed{\text{Le point } M \text{ appartient au cercle } (\Gamma).}$$

4. a) Le point N est sur le cercle (Γ') et donc la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (MB) de même que la droite (DM). On en déduit que

$$\boxed{\text{les droites } (DM) \text{ et } (AN) \text{ sont parallèles.}}$$

b) Dans le triangle MBD, le point A est le milieu du côté $[BD]$ et puisque la droite (AN) est parallèle au côté $[DM]$, on en déduit que N est le milieu du segment $[BM]$. Mais alors,

$$z_N = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i + 1\right) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

$$\boxed{z_N = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.}$$

5. a) L'expression complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est $z' = e^{-i\pi/2}(z - z_B) + z_B$ ou encore $z' = -i(z-1) + 1$ ou enfin $z' = -iz + 1 + i$. Par suite,

$$z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) + 1 + i = -\frac{3}{5}i + \frac{6}{5} + 1 + i = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$\boxed{z_{M'} = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.}$$

b) On a $A(2,1)$, $B(1,0)$ et $M'\left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$ et donc $\overrightarrow{M'A}\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ et $\overrightarrow{M'B}\left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$ puis

$$\overrightarrow{M'A}.\overrightarrow{M'B} = \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right) + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0.$$

Ainsi, le triangle $AM'B$ est rectangle en M' et donc le point M' appartient au cercle de diamètre $[AB]$ c'est-à-dire au cercle (Γ').

$$\boxed{\text{Le point } M' \text{ appartient au cercle } (\Gamma').}$$

