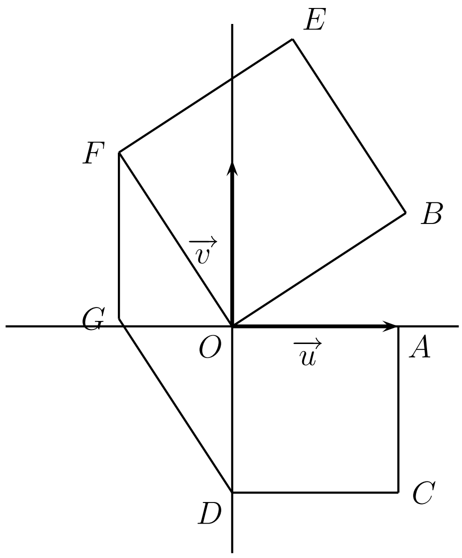
EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On place dans ce repère les points A d'affixe 1, B d'affixe b où b est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle OAB, les carrés direct $ODCA$ et $OBEF$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer les affixes c et d des points C et D.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de r.

b. En déduire que l'affixe f du point F est ib.

c. Déterminer l'affixe e du point E.

3. On appelle G le point tel que le quadrilatère $OFGD$ soit un parallélogramme.
Démontrer que l'affixe g du point G est égal à $i(b-1)$.

4. Démontrer que $\dfrac{e-g}{c-g} = i$ et en déduire que le triangle EGC est rectangle et isocèle.

EXERCICE 2

1) Les points C et D sont les points de coordonnées respectives $(1, -1)$ et $(0, -1)$ et donc $c = 1 - i$ et $d = -i$.

2) a) L'écriture complexe de r est $z' - 0 = e^{i\pi/2}(z - 0)$ ou encore $z' = iz$.

b) Puisque le quadrilatère $OBEF$ est un carré direct, $F = r(B)$ et donc $f = ib$.

c) Le carré $OBEF$ est en particulier un parallélogramme et donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$ puis $e = b + f = b + ib = (1 + i)b$.

$$\boxed{e = (1 + i)b.}$$

3) De même, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD}$ et donc $g = f + d = ib - i = i(b - 1)$.

$$\boxed{g = i(b - 1).}$$

4) $\dfrac{e - g}{c - g} = \dfrac{(1 + i)b - i(b - 1)}{1 - i - i(b - 1)} = \dfrac{b + i}{1 - ib} = \dfrac{i(1 - ib)}{1 - ib} = i.$

$$\boxed{\frac{e - g}{c - g} = i.}$$

1ère solution. On en déduit que $GE = |e - g| = |i(c - g)| = |i| \times |c - g| = 1 \times GC = GC$ et donc le triangle EGC est isocèle en G. On en déduit aussi que $\left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}\right) = \arg\left(\dfrac{e - g}{c - g}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et donc le triangle EGC est rectangle en G.

2ème solution. L'égalité $\dfrac{e - g}{c - g} = i$ s'écrit encore $e - g = e^{i\pi/2}(c - g)$ et signifie que le point E est l'image du point C par la rotation de centre G et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Ceci démontre de nouveau que le triangle EGC est rectangle en G.

$$\boxed{\text{Le triangle } EGC \text{ est rectangle et isocèle en } C.}$$

