EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une réponse fausse, on pourra donner un contre-exemple.

1. Pour tout complexe z, $\text{Re}\left(z^2\right) = \left(\text{Re}(z)\right)^2$.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z, N d'affixe $\overline{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.

3. Pour tout nombre complexe z, si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.

EXERCICE 3

1)	**Faux**
2)	**Vrai**
3)	**Vrai**
4)	**Vrai**

Justifications.

1) $\mathrm{Re}(i^2) = \mathrm{Re}(-1) = -1$ et $(\mathrm{Re}(i))^2 = 0^2 = 0$. Donc $\mathrm{Re}(i^2) \neq (\mathrm{Re}(i))^2$ et la proposition 1 est fausse.

2) $OM = |z|$, $ON = |\overline{z}|$ et $OP = \left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right|$. On sait que $|\overline{z}| = |z|$ et donc $OM = ON$. D'autre part, $OP = \dfrac{|z|^2}{|\overline{z}|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z| = OM$.
Finalement $OM = ON = OP$ et la réponse 2 est vraie.

3) 1ère solution. Soient M, A et B les points affixes respectives z, $-i$ et i.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |i(-i+z)| = |-i(i+z)| \Leftrightarrow |i| \times |z-i| = |-i| \times |z+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow MA = MB\\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{med}[AB] \Leftrightarrow M \in (Ox) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+i(x+iy)| = |1-i(x+iy)| \Leftrightarrow |(1-y)+ix| = |(1+y)-ix|\\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{(1+y)^2+(-x)^2} \Leftrightarrow (1-y)^2+x^2 = (1+y)^2+x^2\\ &\Leftrightarrow 1-2y+y^2 = 1+2y+y^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

La proposition 3 est vraie.

4) 1ère solution. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z-z'| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\\ &\Leftrightarrow x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 = x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2\\ &\Leftrightarrow 4(xx'+yy') = 0 \Leftrightarrow xx'+yy' = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0\\ &\Leftrightarrow (OM)\perp(OM').\end{aligned}$$

2ème solution. Soit N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.

$|z+z'| = \|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = ON$ et $|z-z'| = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{M'M}\| = M'M$.
Donc si $|z+z'| = |z-z'|$ alors $ON = MM'$ et les diagonales du parallélogramme $OMNM'$ ont même longueur. On sait alors que ce parallélogramme est un rectangle et donc que $(OM)\perp(OM')$. La réponse 4 est vraie.

