EXERCICE 3

1)	**Faux**
2)	**Vrai**
3)	**Vrai**
4)	**Vrai**

Justifications.

1) $\mathrm{Re}(i^2) = \mathrm{Re}(-1) = -1$ et $(\mathrm{Re}(i))^2 = 0^2 = 0$. Donc $\mathrm{Re}(i^2) \neq (\mathrm{Re}(i))^2$ et la proposition 1 est fausse.

2) $OM = |z|$, $ON = |\overline{z}|$ et $OP = \left|\dfrac{z^2}{\overline{z}}\right|$. On sait que $|\overline{z}| = |z|$ et donc $OM = ON$. D'autre part, $OP = \dfrac{|z|^2}{|\overline{z}|} = \dfrac{|z|^2}{|z|} = |z| = OM$. Finalement $OM = ON = OP$ et la réponse 2 est vraie.

3) 1ère solution. Soient M, A et B les points affixes respectives z, $-i$ et i.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |i(-i+z)| = |-i(i+z)| \Leftrightarrow |i| \times |z-i| = |-i| \times |z+i| \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow MA = MB \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{med}[AB] \Leftrightarrow M \in (Ox) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\begin{aligned}|1+iz| = |1-iz| &\Leftrightarrow |1+i(x+iy)| = |1-i(x+iy)| \Leftrightarrow |(1-y)+ix| = |(1+y)-ix| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2} = \sqrt{(1+y)^2+(-x)^2} \Leftrightarrow (1-y)^2+x^2 = (1+y)^2+x^2 \\ &\Leftrightarrow 1-2y+y^2 = 1+2y+y^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0.\end{aligned}$$

La proposition 3 est vraie.

4) 1ère solution. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$\begin{aligned}|z+z'| = |z-z'| &\Leftrightarrow \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2} \\ &\Leftrightarrow x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 = x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2 \\ &\Leftrightarrow 4(xx'+yy') = 0 \Leftrightarrow xx'+yy' = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \\ &\Leftrightarrow (OM)\perp(OM').\end{aligned}$$

2ème solution. Soit N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. Le quadrilatère $OMNM'$ est un parallélogramme.

$|z+z'| = \|\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = ON$ et $|z-z'| = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}\| = \|\overrightarrow{M'M}\| = M'M$.
Donc si $|z+z'| = |z-z'|$ alors $ON = MM'$ et les diagonales du parallélogramme $OMNM'$ ont même longueur. On sait alors que ce parallélogramme est un rectangle et donc que $(OM)\perp(OM')$. La réponse 4 est vraie.

