EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$, où M_1 est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point M' est appelé l'image du point M.

1) a) Montrer que les distances OM et OM_1 vérifient la relation $OM \times OM_1 = 1$ et que les angles $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1})$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ vérifient l'égalité des mesures suivantes $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ à 2π près.

b) Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.
Construire le point A' image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).

2) a) Justifier que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

b) Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et -2i. Calculer les affixes des points B' et C' images respectives des points B et C.

c) Placer les points B, C, B' et C' sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).

3) Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

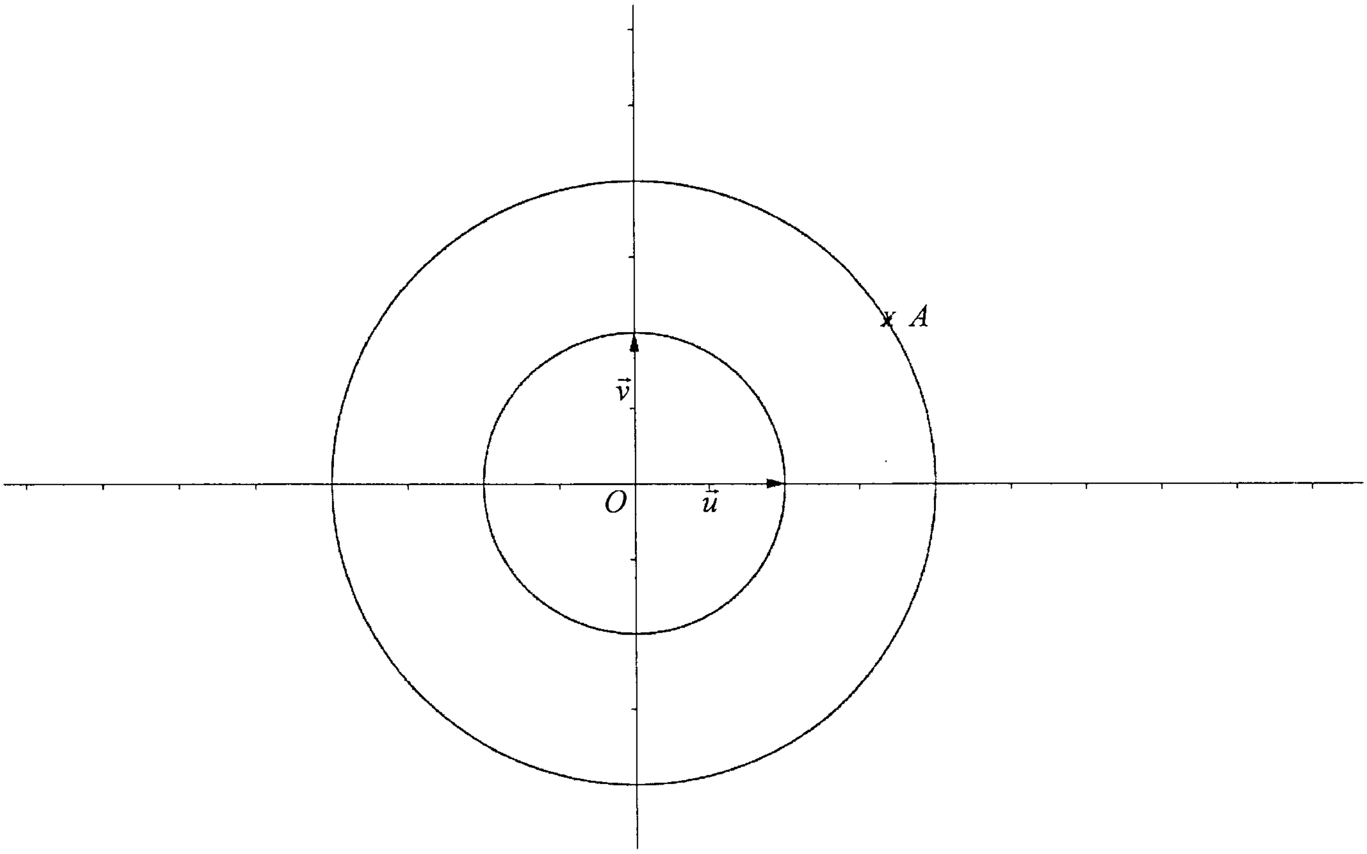
4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que si le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1.

ANNEXE 2
Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

(À rendre avec la copie)



EXERCICE 4

1) **a)** Soit M un point distinct de O dont l'affixe est notée z.

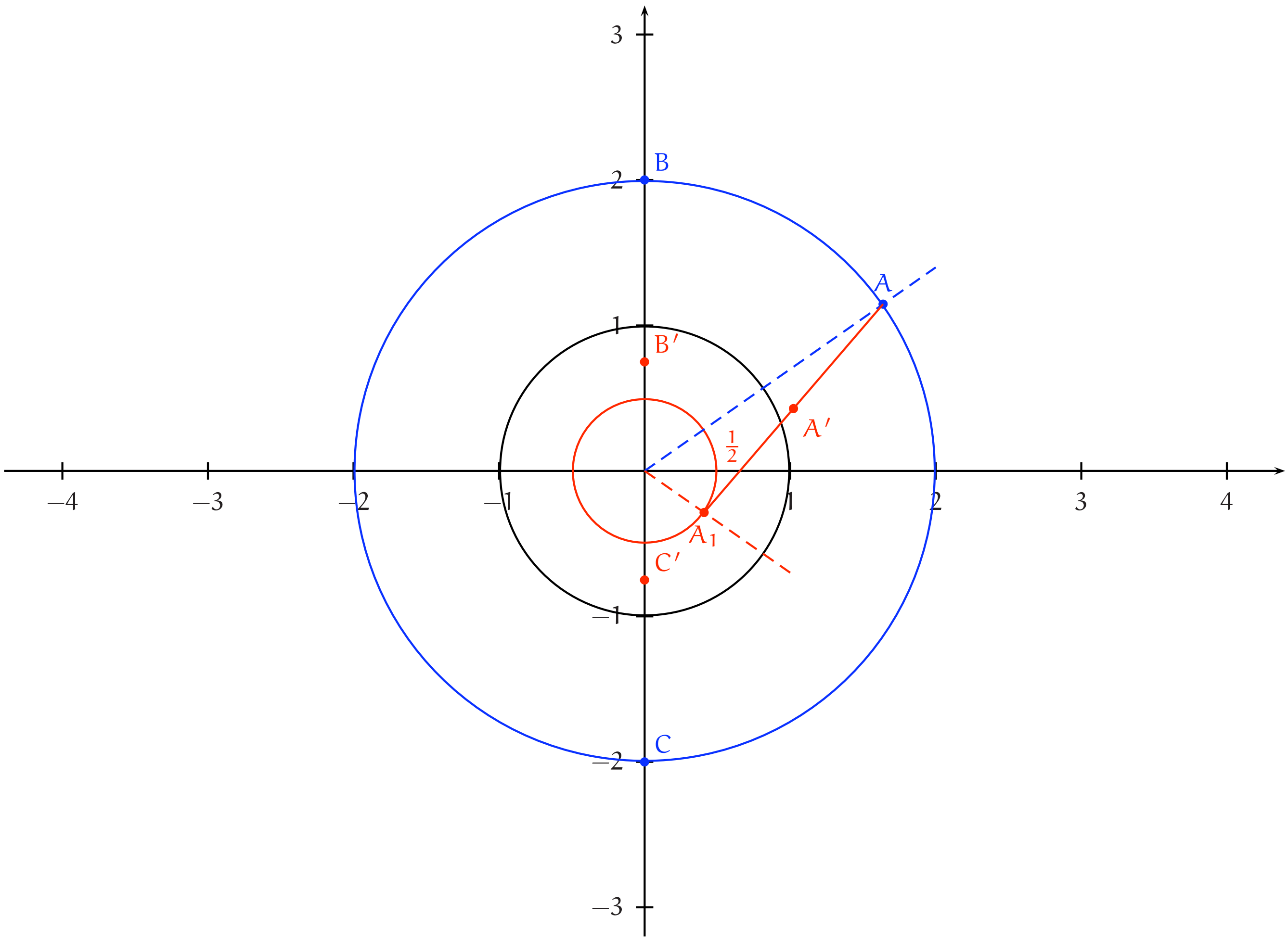
$$OM \times OM_1 = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |z| \times \frac{1}{|z|} = 1,$$

et

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \arg\left(z_{M_1}\right) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) \quad [2\pi].$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \neq O,\ OM \times OM_1 = 1 \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right) \quad [2\pi].}$$

b) Le point A_1 est défini par $OA_1 = \dfrac{1}{OA} = \dfrac{1}{2}$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_1}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) \quad [2\pi]$. Ces égalités permettent de construire le point A_1 et enfin le point A' est le milieu du segment $[AA_1]$.



2) **a)** Soit M un point distinct de O.

$$z' = z_{M'} = \frac{1}{2}(z_M + z_{M_1}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

b)

$$z_{B'} = \frac{1}{2}\left(z_B + \frac{1}{z_B}\right) = \frac{1}{2}\left(2i + \frac{1}{2i}\right) = \frac{(2i)^2+1}{4i} = \frac{-4+1}{4i} = \frac{-3}{4i} = \frac{-3 \times (-i)}{4i \times (-i)} = \frac{3i}{4},$$

et

$$z_{C'} = \frac{1}{2}\left(z_C + \frac{1}{z_C}\right) = \frac{1}{2}\left(-2i + \frac{1}{-2i}\right) = \frac{(-2i)^2+1}{-4i} = -\frac{3i}{4}.$$

$$\boxed{z_{B'} = \frac{3i}{4} \text{ et } z_{C'} = -\frac{3i}{4}.}$$

3) Soit M un point distinct de O.

$$M' = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2z \Leftrightarrow \frac{1}{z} = z \Leftrightarrow z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z = -1.$$

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M' = M \text{ sont les points de coordonnées } (1,0) \text{ et } (-1,0).}$$

4) Soit M un point distinct de O dont l'affixe est notée z.

1ère solution. Si M est sur le cercle de centre O et de rayon 1, on a $|z| = 1$ et donc il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, z' est un réel élément de l'intervalle $[-1,1]$ et donc M' est élément du segment $[KL]$.

2ème solution. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$ (car $OM^2 = 1$).

$$z' = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x.$$

Or $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ et on retrouve le fait que z' est un réel élément de l'intervalle $[-1,1]$.

