

EXERCICE 4

Partie A

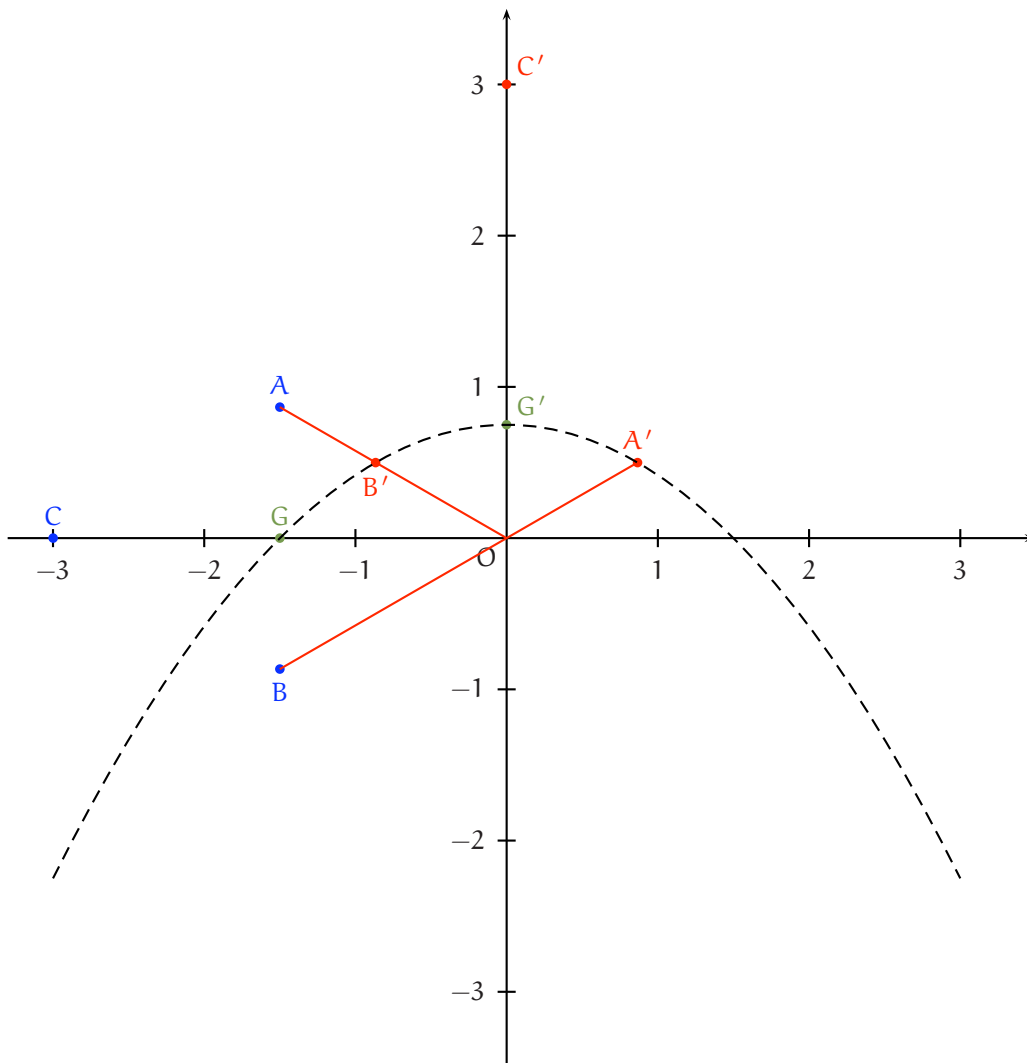
$$1) \quad z_A = \left| -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \text{ puis}$$

$$z_A = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{3}e^{5i\pi/6}.$$

On sait d'autre part que $\overline{z_A}$ a le même module que z_A et un argument opposé à celui de z_A modulo 2π .
Donc $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}$.

$$z_A = \sqrt{3}e^{5i\pi/6} \text{ et } z_B = \sqrt{3}e^{-5i\pi/6}.$$

2)



$$3) \quad \text{1ère solution.} \bullet AB = |z_B - z_A| = \left| \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} - i = \sqrt{3}.$$

$$\bullet AC = |z_C - z_A| = \left| -3 - \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \left| \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}.$$

$$CB = |z_B - z_C| = |\overline{z_A} - \overline{z_C}| = |\overline{z_A - z_C}| = |z_A - z_C| = AC = \sqrt{3}.$$

Donc $AB = AC = BC$ et le triangle ABC est équilatéral.

2ème solution.

$$\begin{aligned} \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} &= \frac{-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3} = \frac{\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + i)}{\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} \\ &= \frac{3 + 2i\sqrt{3} - 1}{3 + 1} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\pi/3}. \end{aligned}$$

Par suite, $\frac{CA}{CB} = \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = |e^{i\pi/3}| = 1$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

En résumé, $CA = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et on a de nouveau montré que

le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

- 1) a) • $z'_A = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{5i\pi/6}\right)^2 = \frac{1}{3}i \times 3e^{2 \times \frac{5i\pi}{6}} = ie^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{5i\pi/3} = e^{i\pi/2} \times e^{-i\pi/3} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\pi/6}$.
- $z'_B = \frac{1}{3}i\left(\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}\right)^2 = e^{i\pi/2}e^{-5i\pi/3} = e^{-7i\pi/6} = e^{5i\pi/6}$.
- $z'_C = \frac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{i\pi/2}$.

$$z'_A = e^{i\pi/6}, z'_B = e^{5i\pi/6} \text{ et } z'_C = 3e^{i\pi/2}.$$

b) Voir figure.

c) $\frac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O} = \frac{\sqrt{3}e^{5i\pi/6}}{e^{5i\pi/6}} = \sqrt{3}$. Par suite, $(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA}) = \arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_{B'} - z_O}\right) = 0 (2\pi)$ et donc les points O, A et B' sont alignés.

$\frac{z_{A'} - z_O}{z_B - z_O} = \frac{e^{i\pi/6}}{\sqrt{3}e^{-5i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Par suite, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}) = \arg\left(\frac{z_{A'} - z_O}{z_B - z_O}\right) = \pi (2\pi)$ et donc les points O, B et A' sont alignés.

2) a) $z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.

$$z_{G'} = \frac{1}{3}i\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}i.$$

b) L'affixe du barycentre des points $O' = O$, A' , B' et C' est

$$\frac{z_{O'} + z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 3i\right) = i \neq z_{G'}.$$

Ainsi, le point G' n'est pas l'isobarycentre des points O' , A' , B' et C' .

3) Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

$$z' = \frac{1}{3}i(a + ib)^2 = \frac{1}{3}i(a^2 + 2iab - b^2) = \frac{1}{3}(-2ab + i(a^2 - b^2)).$$

La droite (AB) est la droite d'équation $x = -\frac{3}{2}$. Soit $M\left(-\frac{3}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB). Notons x et y les coordonnées de M' . D'après le calcul précédent

$$x = \frac{1}{3}\left(-2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times t\right) = t \text{ et } y = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - t^2\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}t^2,$$

et donc $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

Si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.