

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} iz^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.
b) Placer les points A', B' et C'.
c) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.
2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f .
a) Déterminer les affixes des points G et G'.
b) Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?
3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)