EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

1) Soit M un point du plan.
• Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$. Dans ce cas, $z = z' = \omega$ et donc $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.
• Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$ et

$$r(M) = M' \Rightarrow \Omega M = \Omega M' \Rightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \Rightarrow \left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1,$$

et

$$r(M) = M' \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi] \Rightarrow \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi].$$

Ainsi, $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument α. On en déduit que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$ ou encore que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Dans tous les cas, on a montré que

$$\boxed{z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).}$$

PARTIE B

1) a) Soit M un point du plan.

$$f(M) = M \Leftrightarrow iz + 4 + 4i = z \Leftrightarrow (1 - i)z = 4 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{4 + 4i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(4 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4 + 4i + 4i - 4}{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow z = \frac{8i}{2} \Leftrightarrow z = 4i.$$

$$\boxed{\omega = 4i.}$$

b) Soit M un point du plan.

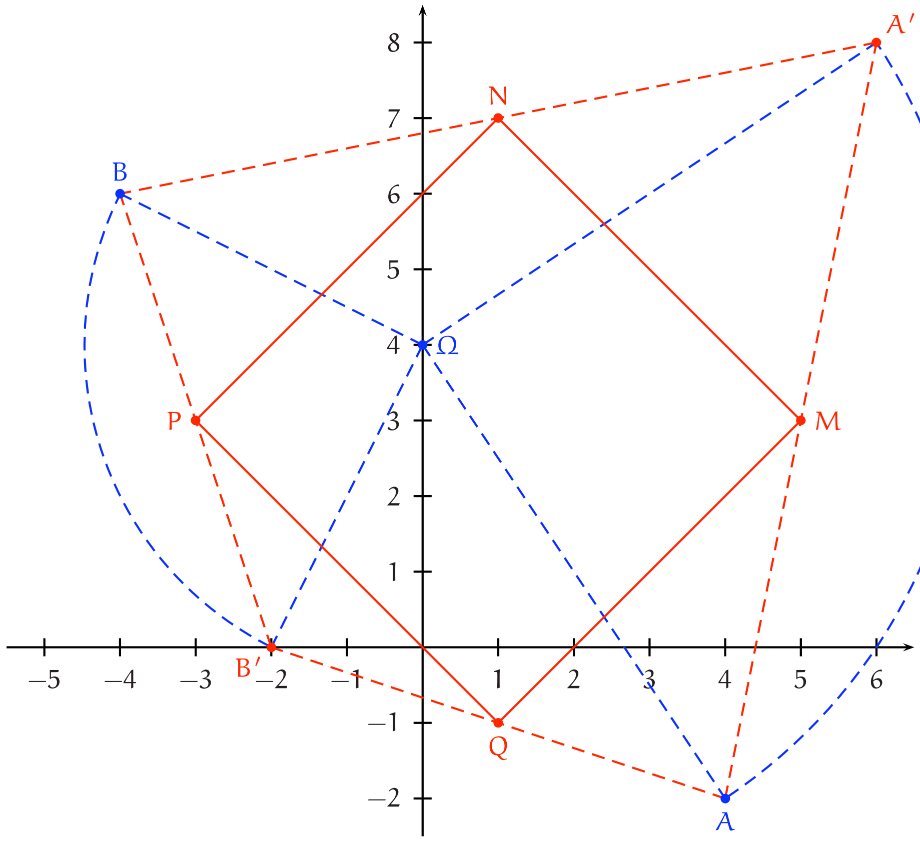
$$z' - 4i = z' - \omega = (iz + 4 + 4i) - (i\omega + 4 + 4i) = i(z - \omega) = i(z - 4i).$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } z' - 4i = i(z - 4i).}$$

c) On a $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{i\pi/2}$ et on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est la rotation de centre } \Omega(0, 4) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

2) a)



b) $a' = 4i + i(a - 4i) = 4i + i(4 - 2i - 4i) = 4i + i(4 - 6i) = 4i + 4i + 6 = 6 + 8i$ et
$b' = 4i + i(b - 4i) = 4i + i(-4 + 6i - 4i) = 4i + i(-4 + 2i) = 4i - 4i - 2 = -2$.

$$\boxed{a' = 6 + 8i \text{ et } b' = -2.}$$

b) $m = \dfrac{a + a'}{2} = \dfrac{4 - 2i + 6 + 8i}{2} = 5 + 3i$.

c) $z_{\overrightarrow{MN}} = n - m = (1 + 7i) - (5 + 3i) = -4 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{QP}} = p - q = (-3 + 3i) - (1 - i) = -4 + 4i$. Ainsi, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ et donc

$$\boxed{\text{le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.}}$$

c) $q - m = (1 - i) - (5 + 3i) = -4 - 4i$ et donc

$$\frac{q - m}{n - m} = \frac{-4 - 4i}{-4 + 4i} = \frac{4i(-1 + i)}{4(-1 + i)} = i.$$

Par suite, le point Q est l'image du point N par la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que $MQ = MN$ et $\widehat{QMN} = 90°$. Puisque le parallélogramme MNPQ a un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur

$$\boxed{\text{le quadrilatère MNPQ est un carré.}}$$

4) Le vecteur $\overrightarrow{B'A}$ a pour coordonnées $(6, -2)$ et le vecteur $\overrightarrow{\Omega N}$ a pour coordonnées $(1, 3)$. Donc

$$\overrightarrow{B'A}.\overrightarrow{\Omega N} = 6 \times 1 - 2 \times 3 = 0,$$

et donc

$$\boxed{\text{les droites } (B'A) \text{ et } (\Omega N) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

