EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives a, b et c, avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$

  $\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

- Soit z un nombre complexe et soit θ un nombre réel :

  $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = iz + 4 + 4i.$$

1. a) Déterminer l'affixe ω du point Ω tel que $f(\Omega) = \Omega$.

   b) Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a : $z' - 4i = i(z - 4i)$.

   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2i$ et $b = -4 + 6i$.

   a) Placer les points A, B et Ω sur une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

   b) Déterminer les affixes des points A' et B', images respectives des points A et B par f.

3. On appelle m, n, p et q les affixes des points M, N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA'], [A'B], [BB'] et [B'A].

   a) Déterminer m. On admettra que $n = 1 + 7i$, $p = -3 + 3i$ et $q = 1 - i$.

   b) Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.

   c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q-m}{n-m}$.

   En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.

4. Démontrer que les droites $(\mathrm{B'A})$ et $(\Omega\mathrm{N})$ sont perpendiculaires.