EXERCICE 2 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - i, b = 1 - 3i \text{ et } c = -1 - i.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.

2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.

b. En déduire une expression de n en fonction de m.

3. On appelle Q le milieu du segment $[AN]$ et q son affixe.
Montrer que : $q = \dfrac{(1-i)m}{2} + 2 + i$.

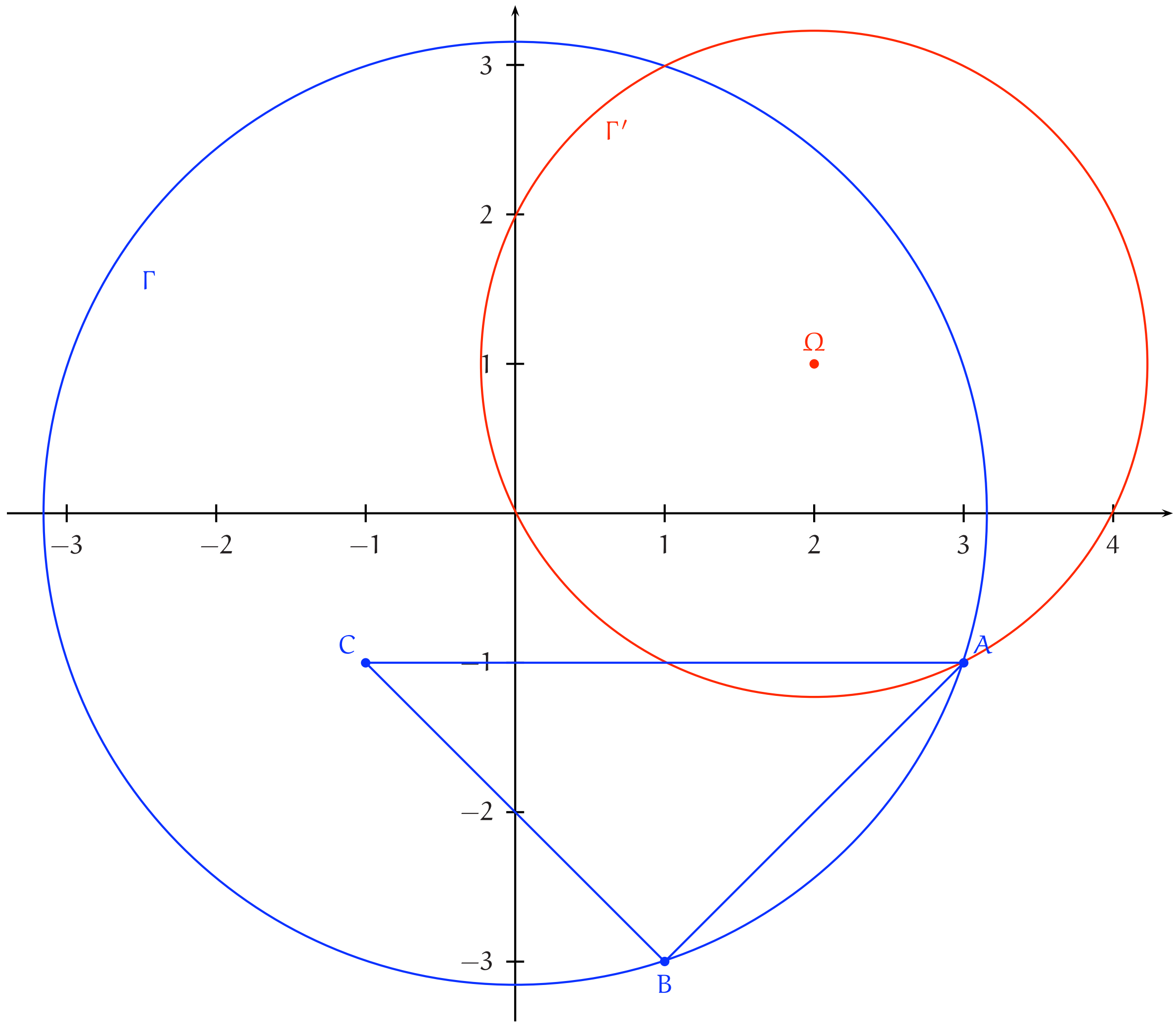
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. Calculer $|q - 2 - i|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ.

EXERCICE 2

1. a.



b. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(2, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$. Donc d'une part,

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2 \times (-2) + 2 \times 2 = 0,$$

et le triangle ABC est rectangle en B, et d'autre part $AB = AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ et le triangle ABC est isocèle en B.

$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle et isocèle en } B.}$

c. $OA = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ et $OB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Donc

$\boxed{\text{les points } A \text{ et } B \text{ sont sur le cercle } \Gamma \text{ de centre } O \text{ et de rayon } \sqrt{10}.}$

2) a. Soient Ω un point du plan dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Ici, $\omega = m$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ de sorte que $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = i$. L'écriture complexe de r est donc

$$z' = i(z - m) + m = iz + (1 - i)m.$$

$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = iz + (1 - i)m.}$

b. Pour $z = a$, on obtient en particulier

$$n = i(3-i) + (1-i)m = (1-i)m + 1 + 3i.$$

$$\boxed{n = (1-i)m + 1 + 3i.}$$

3. $q = \dfrac{1}{2}(a+n) = \dfrac{1}{2}(3 - i + (1-i)m + 1 + 3i) = \dfrac{1}{2}((1-i)m + 4 + 2i) = \dfrac{(1-i)m}{2} + 2 + i.$

$$\boxed{q = \frac{(1-i)m}{2} + 2 + i.}$$

4. a. Soient Ω un point du plan dont l'affixe est notée ω et R un réel positif. On sait que la cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points du plan dont les affixes sont de la forme

$$z = \omega + Re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Ici, d'après la question 1.c., M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ et donc il existe un réel θ tel que $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. D'après la question 3., $|q-2-i| = \left|\dfrac{(1-i)m}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \times |1-i| \times |m| = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5}$. Donc, en notant Ω le point de coordonnées $(2,1)$, le point Q appartient au cercle Γ' de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

Plus précisément, $1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et donc

$$q = 2 + i + \frac{1}{2} \times \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \times \sqrt{10}e^{i\theta} = 2 + i + \sqrt{5}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et donc les points Q sont les points du plan dont les affixes sont de la forme

$$q = 2 + i + \sqrt{5}e^{i\theta'},\ \theta' \in \mathbb{R}.$$

D'après la remarque initiale de la question 4.a.,

$$\boxed{\text{quand } M \text{ décrit le cercle } \Gamma,\ Q \text{ décrit le cercle } \Gamma' \text{ de centre } \Omega(2,1) \text{ et de rayon } \sqrt{5}.}$$

