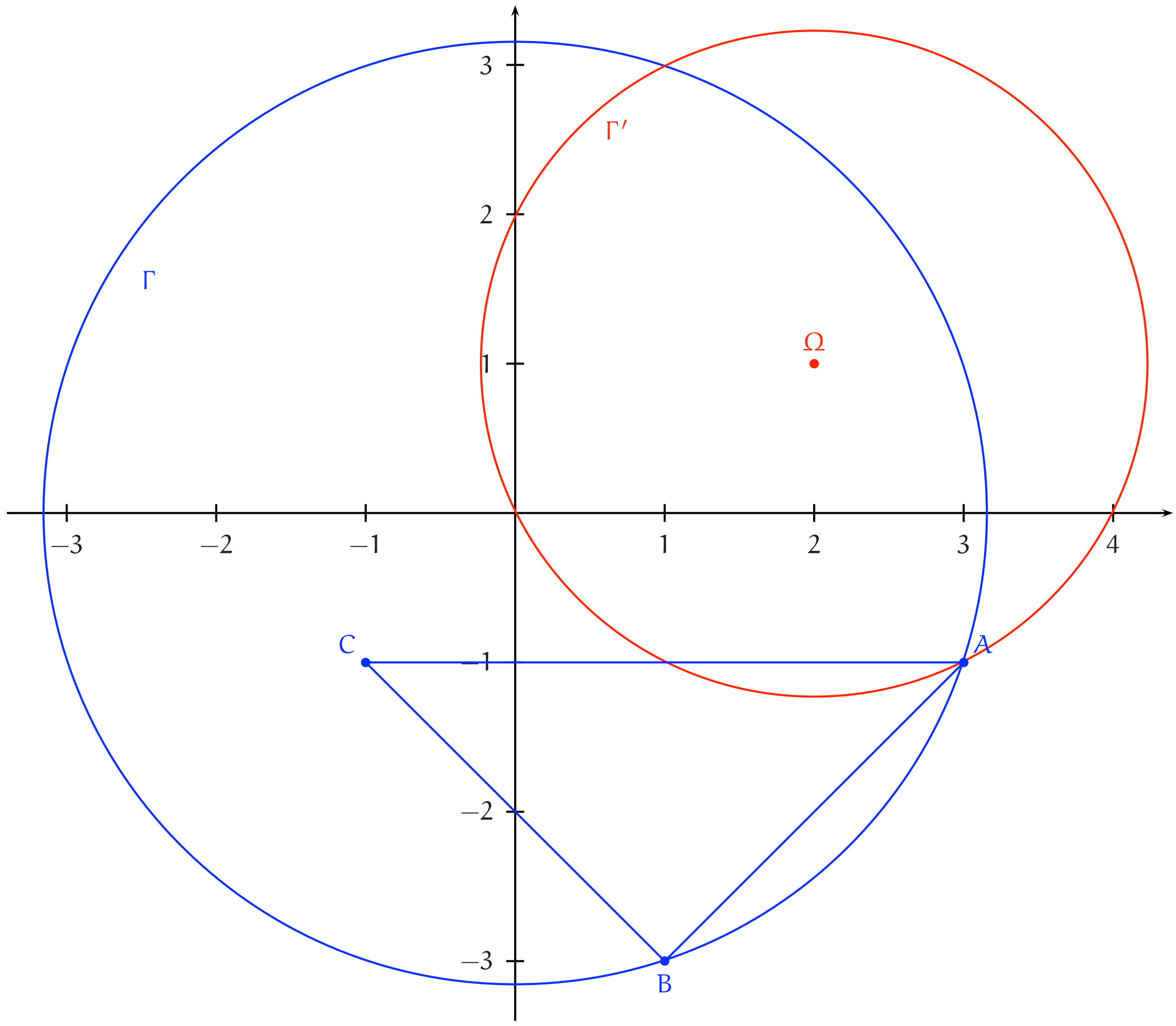
EXERCICE 2

1. a.



b. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(2, 2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-2, 2)$. Donc d'une part,

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2 \times (-2) + 2 \times 2 = 0,$$

et le triangle ABC est rectangle en B, et d'autre part $AB = AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ et le triangle ABC est isocèle en B.

$$\boxed{\text{Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.}}$$

c. $OA = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ et $OB = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$. Donc

$$\boxed{\text{les points A et B sont sur le cercle } \Gamma \text{ de centre O et de rayon } \sqrt{10}.}$$

2) a. Soient Ω un point du plan dont l'affixe est notée ω et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Ici, $\omega = m$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ de sorte que $e^{i\theta} = e^{i\pi/2} = i$. L'écriture complexe de r est donc

$$z' = i(z - m) + m = iz + (1 - i)m.$$

$$\boxed{\text{L'écriture complexe de } r \text{ est } z' = iz + (1 - i)m.}$$

b. Pour $z = a$, on obtient en particulier

$$n = i(3 - i) + (1 - i)m = (1 - i)m + 1 + 3i.$$

$$\boxed{n = (1 - i)m + 1 + 3i.}$$

3. $q = \dfrac{1}{2}(a + n) = \dfrac{1}{2}(3 - i + (1 - i)m + 1 + 3i) = \dfrac{1}{2}((1 - i)m + 4 + 2i) = \dfrac{(1 - i)m}{2} + 2 + i.$

$$\boxed{q = \frac{(1 - i)m}{2} + 2 + i.}$$

4. a. Soient Ω un point du plan dont l'affixe est notée ω et R un réel positif. On sait que la cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points du plan dont les affixes sont de la forme

$$z = \omega + Re^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Ici, d'après la question 1.c., M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ et donc il existe un réel θ tel que $m = \sqrt{10}e^{i\theta}$.

b. D'après la question 3., $|q - 2 - i| = \left|\dfrac{(1 - i)m}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \times |1 - i| \times |m| = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{10} = \sqrt{5}$. Donc, en notant Ω le point de coordonnées $(2, 1)$, le point Q appartient au cercle Γ' de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

Plus précisément, $1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et donc

$$q = 2 + i + \frac{1}{2} \times \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \times \sqrt{10}e^{i\theta} = 2 + i + \sqrt{5}e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta - \dfrac{\pi}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et donc les points Q sont les points du plan dont les affixes sont de la forme

$$q = 2 + i + \sqrt{5}e^{i\theta'},\ \theta' \in \mathbb{R}.$$

D'après la remarque initiale de la question 4.a.,

$$\boxed{\text{quand } M \text{ décrit le cercle } \Gamma,\ Q \text{ décrit le cercle } \Gamma' \text{ de centre } \Omega(2, 1) \text{ et de rayon } \sqrt{5}.}$$

