EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multilple.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte, ou une absence de réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

a. (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.

b. (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.

c. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

d. (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz - 2i$.

a. f est une homothétie.

b. Le point d'affixe $-1 - 2i$ est un antécédent du point d'affixe i.

c. f est la rotation de centre le point d'affixe $1 + i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

d. f est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - i$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$|z - 1 + i| = |z + 1 + 2i|.$$

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$$1 - i, -1 + 2i \text{ et } -1 - 2i.$$

a. C est un point de (F).

b. (F) est la médiatrice du segment $[AB]$.

c. (F) est la médiatrice du segment $[AC]$.

d. (F) est le cercle de diamètre $[AB]$.

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z + |z|^2 = 7 + i.$$

Cette équation admet :

a. Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.

b. Une solution réelle.

c. Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.

d. Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Réunion

EXERCICE 1

1) **c.**

2) **d.**

3) **c.**

4) **a.**

Explications.

1) On sait que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = \omega + Re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, (où R est un réel strictement positif et ω est un nombre complexe) est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon R. Ici, $\omega = 1 - 2i$ et $R = 1$. La bonne réponse est donc la réponse c.

2) L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$. On sait alors que f est une rotation. L'angle de f est $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
Le centre de f est son point invariant. Soit z un nombre complexe.

$$\begin{aligned} z = z' &\Leftrightarrow z = -iz - 2i \Leftrightarrow (1+i)z = -2i \Leftrightarrow z = \frac{-2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{-2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Leftrightarrow z = \frac{-2i-2}{1^2+1^2} \\ &\Leftrightarrow z = -1 - i. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse d. On peut noter que si $z = -1 - 2i$, $z' = -i(-1-2i) - 2i = i - 2 - 2i = -2 - i \neq i$.

3) Soit M un point du plan d'affixe z.

$$M \in (F) \Leftrightarrow |z - 1 + i| = |z + 1 + 2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_C| \Leftrightarrow AM = CM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AC].$$

La bonne réponse est la réponse c.

4) Si z est un nombre réel, alors $z + |z|^2$ est un nombre réel et puisque $7 + i \notin \mathbb{R}$, on ne peut avoir $z + |z|^2 = 7 + i$. La réponse b. est fausse. Ensuite, la partie imaginaire de $z + |z|^2$ est celle de z. Cette partie imaginaire doit être égale à celle de $7 + i$ c'est-à-dire 1. Donc les réponses c. et d. sont fausses. Il ne reste que la réponse a. Vérifions-le.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$z + |z|^2 = 7 + i \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x + iy = 7 + i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + x = 7 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 1 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + x - 6 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4(-6) = 25$. Cette équation admet les deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. L'ensemble des solutions de l'équation $z + |z|^2 = 7 + i$ est $\{2 + i, -3 + i\}$. La réponse a. est donc effectivement correcte.

