

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

Partie A Étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r .

La figure est donnée en annexe page 6 (figure 1).

- Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.
 - En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.
- Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2i$.
- Montrer que la droite (AC) a pour équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.
 - Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B Étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi[$.

On considère la rotation de centre O et d'angle θ .

On note A' le point d'affixe a' , image du point A par la rotation r , et B' le point d'affixe b' , image du point B par la rotation r .

La figure est donnée en annexe page 6 (figure 2).

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment [BB'] en son milieu.

- Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ .
- Soit P le point d'affixe p milieu de [AA'] et Q le point d'affixe q milieu de [BB'].
 - Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ .
 - Démontrer que $\frac{-p}{q-p} = \frac{-a}{b-a}$.
 - En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).
 - Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

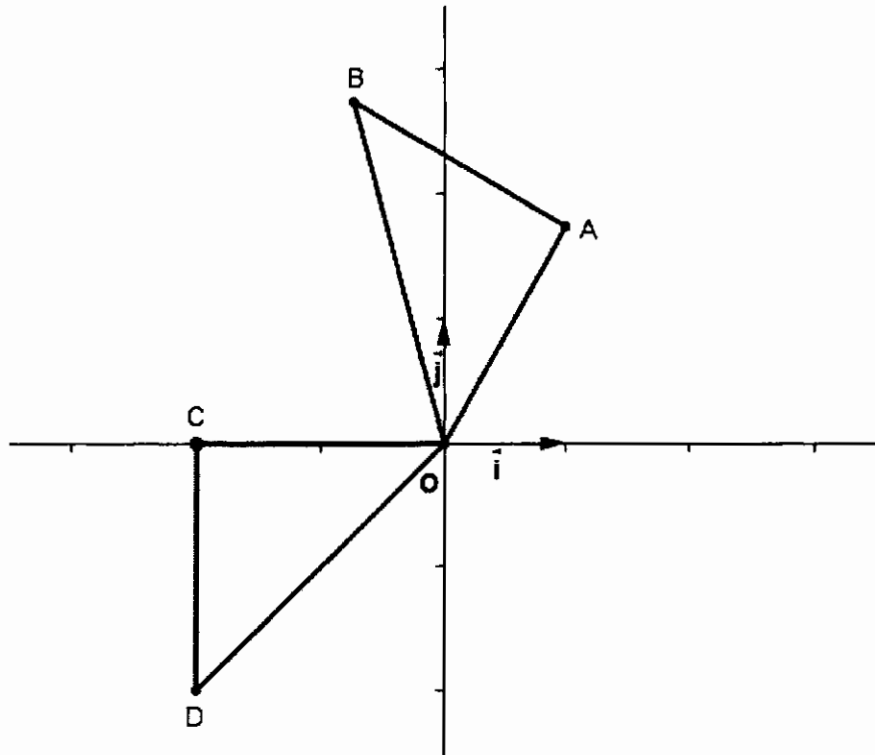
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4

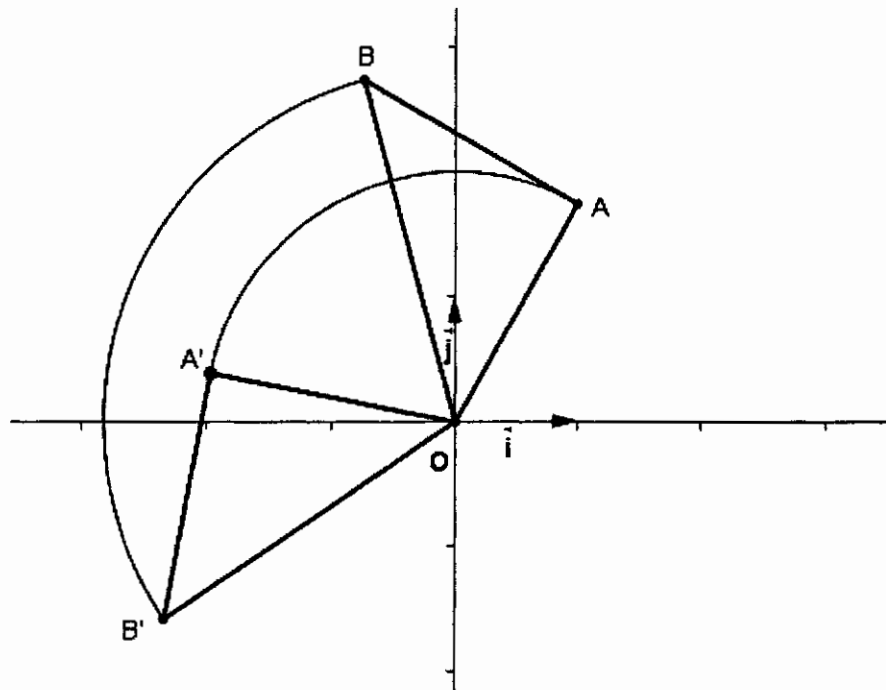
Partie A

Figure 1



Partie B

Figure 2



EXERCICE 4

Partie A Etude d'un cas particulier

1) a)

$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1^2} = i.$$

$$\frac{-a}{b-a} = i.$$

b) $\frac{AO}{AB} = \frac{|0-a|}{|b-a|} = \left| \frac{-a}{b-a} \right| = |i| = 1$ et donc $AO = AB$. Le triangle OAB est isocèle en A .

$(\vec{AB}, \vec{AO}) = \arg\left(\frac{-a}{b-a}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Le triangle OAB est rectangle en A .

Le triangle OAB est rectangle isocèle en A .

2) L'expression complexe de la rotation r est $z' = e^{2i\pi/3}z$ ou encore $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Par suite,

$$c = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} = -2.$$

$$c = -2.$$

3) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (AC) \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2-1 \\ y-\sqrt{3} & 0-\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1) + 3(y-\sqrt{3}) = 0 \\ \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

Une équation de la droite (AC) est $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

b) L'affixe du milieu E du segment $[BD]$ est

$$e = \frac{b+d}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i-2-2i}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(x_E+2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{3 \times 2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = y_E.$$

Le milieu du segment $[BD]$ appartient à la droite (AC) .

Partie B Etude du cas général

1) $a' = e^{i\theta}a$ et $b' = e^{i\theta}b$.

2) a) $p = \frac{a+a'}{2} = \frac{a+e^{i\theta}a}{2} = \frac{1+e^{i\theta}}{2}a$ et de même $q = \frac{1+e^{i\theta}}{2}b$.

b) $q - p = \frac{1 + e^{i\theta}}{2}b - \frac{1 + e^{i\theta}}{2}a = \frac{1 + e^{i\theta}}{2}(b - a)$. Maintenant, $b - a \neq 0$ puis pour $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi.$$

Ainsi, pour $\theta \neq \pi$, on a $q - p \neq 0$ et

$$\frac{-p}{q - p} = \frac{\frac{1 + e^{i\theta}}{2} \times (-a)}{\frac{1 + e^{i\theta}}{2} \times (b - a)} = \frac{-a}{b - a}.$$

Pour $\theta = \pi$, on a $P = Q = O$.

c) Pour $\theta \neq \pi$, on a $(\vec{PQ}, \vec{PO}) = \arg\left(\frac{-p}{q - p}\right) = \arg\left(\frac{-a}{b - a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'après la question A.1)a). Donc

la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

d) Pour $\theta \neq \pi$, on a $P \neq O$. De plus, puisque le triangle OAA' est isocèle en O et que le point P est le milieu de $[AA']$, la droite (OP) est la médiatrice du segment $[AA']$. En particulier, la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AA') qui est aussi la droite (PA).

D'après la question précédente, la droite (OP) est également perpendiculaire à la droite (PQ). On en déduit que les droites (PA) et (PQ) sont parallèles. Puisque ces droites ont en commun le point P , ces droites sont confondues et donc le point Q appartient à la droite (PA) qui est aussi la droite (AA').

Ce dernier résultat reste vrai quand $\theta = \pi$ car alors $Q = P$ ou encore Q est le milieu du segment $[AA']$.

Le point Q appartient à la droite (AA').