EXERCICE 4

Partie A Etude d'un cas particulier

1) a)

$$\frac{-a}{b-a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i-1-i\sqrt{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{(-\sqrt{3}+i)(-\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{(-\sqrt{3})^2+1^2} = i.$$

$$\boxed{\frac{-a}{b-a} = i.}$$

b) $\dfrac{AO}{AB} = \dfrac{|0-a|}{|b-a|} = \left|\dfrac{-a}{b-a}\right| = |i| = 1$ et donc $AO = AB$. Le triangle OAB est isocèle en A.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) = \arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ [2π]. Le triangle OAB est rectangle en A.

$\boxed{\text{Le triangle OAB est rectangle isocèle en } A.}$

2) L'expression complexe de la rotation r est $z' = e^{2i\pi/3}z$ ou encore $z' = \left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Par suite,

$$c = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} = -2.$$

$$\boxed{c = -2.}$$

3) a) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$M \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2-1 \\ y-\sqrt{3} & 0-\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1)+3(y-\sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).$$

$$\boxed{\text{Une équation de la droite (AC) est } y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2).}$$

b) L'affixe du milieu E du segment [BD] est

$$e = \frac{b+d}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i-2-2i}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Par suite,

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(x_E+2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+2\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{3\times 2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = y_E.$$

$\boxed{\text{Le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).}}$

Partie B Etude du cas général

1) $a' = e^{i\theta}a$ et $b' = e^{i\theta}b$.

2) a) $p = \dfrac{a+a'}{2} = \dfrac{a+e^{i\theta}a}{2} = \dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a$ et de même $q = \dfrac{1+e^{i\theta}}{2}b$.

b) $q-p=\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}b-\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}a=\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}(b-a)$. Maintenant, $b-a\neq 0$ puis pour $\theta\in]0,2\pi[$,

$$\frac{1+e^{i\theta}}{2}=0\Leftrightarrow e^{i\theta}=-1\Leftrightarrow\theta=\pi.$$

Ainsi, pour $\theta\neq\pi$, on a $q-p\neq 0$ et

$$\frac{-p}{q-p}=\frac{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\times(-a)}{\dfrac{1+e^{i\theta}}{2}\times(b-a)}=\frac{-a}{b-a}.$$

Pour $\theta=\pi$, on a $P=Q=O$.

c) Pour $\theta\neq\pi$, on a $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PO}\right)=\arg\left(\dfrac{-p}{q-p}\right)=\arg\left(\dfrac{-a}{b-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ d'après la question A.1)a). Donc

$$\boxed{\text{la droite } (OP) \text{ est perpendiculaire à la droite } (PQ).}$$

d) Pour $\theta\neq\pi$, on a $P\neq O$. De plus, puisque le triangle OAA' est isocèle en O et que le point P est le milieu de $[AA']$, la droite (OP) est la médiatrice du segment $[AA']$. En particulier, la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AA') qui est aussi la droite (PA).

D'après la question précédente, la droite (OP) est également perpendiculaire à la droite (PQ). On en déduit que les droites (PA) et (PQ) sont parallèles. Puisque ces droites ont en commun le point P, ces droites sont confondues et donc le point Q appartient à la droite (PA) qui est aussi la droite (AA').

Ce dernier résultat reste vrai quand $\theta=\pi$ car alors $Q=P$ ou encore Q est le milieu du segment $[AA']$.

$$\boxed{\text{Le point } Q \text{ appartient à la droite } (AA').}$$

