Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Soit A le point d'affixe $a=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$.

Partie A Étude d'un cas particulier

On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe c image du point A par la rotation r et D le point d'affixe d image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe page 6 (figure 1).

1. **a.** Exprimer $\frac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

   b. En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

2. Démontrer que $c=-2$. On admet que $d=-2-2\mathrm{i}$.

3. **a.** Montrer que la droite (AC) a pour équation $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

   b. Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

Partie B Étude du cas général

Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $]0,2\pi[$.

On considère la rotation de centre O et d'angle θ.
On note A′ le point d'affixe a', image du point A par la rotation r, et B′ le point d'affixe b', image du point B par la rotation r.
La figure est donnée en annexe page 6 (figure 2).

L'objectif est de démontrer que la droite (AA') coupe le segment $[\mathrm{BB}']$ en son milieu.

1. Exprimer a' en fonction de a et θ et b' en fonction de b et θ.

2. Soit P le point d'affixe p milieu de $[\mathrm{AA}']$ et Q le point d'affixe q milieu de $[\mathrm{BB}']$.

   a. Exprimer p en fonction de a et θ puis q en fonction de b et θ.

   b. Démontrer que $\frac{-p}{q-p}=\frac{-a}{b-a}$.

   c. En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

   d. Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA').

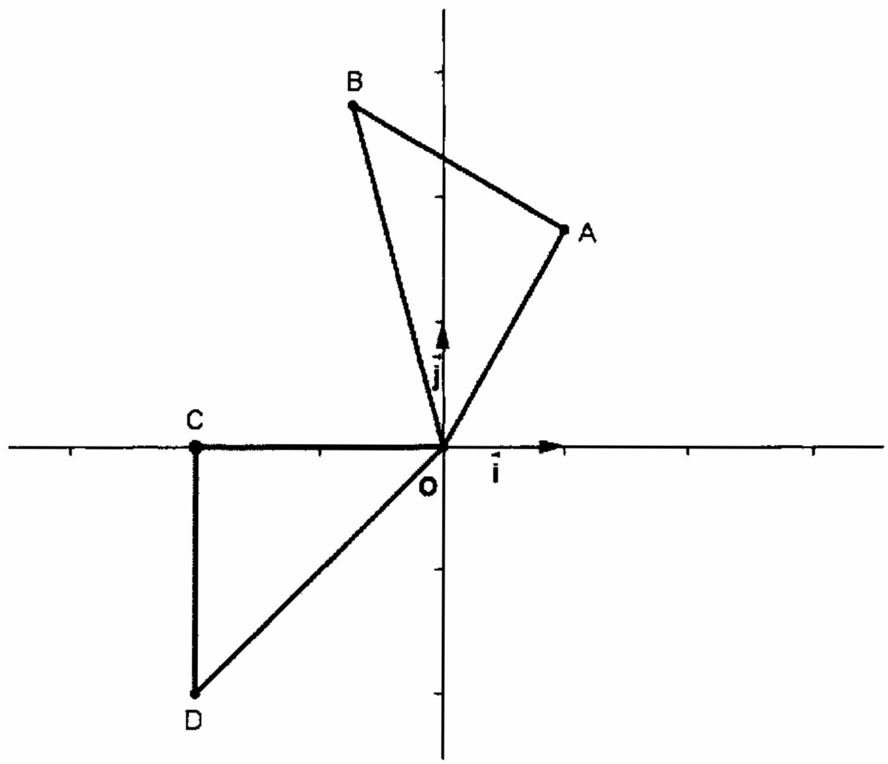
ANNEXE

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.

Exercice 4

Partie A

Figure 1



Partie B

Figure 2