

## EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité 1 cm.

### 1. Restitution organisée de connaissances

Pour  $M \neq \Omega$ , on rappelle que le point  $M'$  est l'image du point  $M$  par la rotation  $r$  de centre  $\Omega$  et d'angle de mesure  $\theta$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{cases}$$

a) Soient  $z, z'$  et  $\omega$  les affixes respectives des points  $M, M'$  et  $\Omega$ .

Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b) En déduire l'expression de  $z'$  en fonction de  $z, \theta$  et  $\omega$ .

### 2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

### 3. Soient $A$ et $B$ les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$ .

a) Ecrire  $a$  et  $b$  sous forme exponentielle.

b) Faire une figure et placer les points  $A$  et  $B$ .

c) Montrer que  $OAB$  est un triangle équilatéral.

### 4. Soit $C$ le point d'affixe $c = -8i$ et $D$ son image par la rotation de centre $O$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ .

Placer les points  $C$  et  $D$ .

Montrer que l'affixe du point  $D$  est  $d = 4\sqrt{3} + 4i$ .

### 5. Montrer que $D$ est l'image du point $B$ par une homothétie de centre $O$ dont on déterminera le rapport.

### 6. Montrer que $OAD$ est un triangle rectangle.

## EXERCICE 2

### 1. Restitution organisée de connaissances

a) Soit  $M$  un point du plan distinct de  $\Omega$ . L'égalité (1) montre que  $M'$  est distinct de  $\Omega$  puis que  $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ .

D'autre part, l'égalité fournit  $\arg \left( \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) = \theta [2\pi]$ .

b) Soit  $M$  un point du plan distinct de  $\Omega$ . La question précédente montre que  $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ . Par suite,  $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$  ou encore  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$  ou enfin  $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ . Cette dernière égalité reste vraie quand  $z = \omega$  car dans ce cas  $z' = z = \omega$ . Finalement

$$\text{pour tout nombre complexe } z, z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On note (E) l'équation proposée. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = 3 \times 16 - 4 \times 16 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir  $z_1 = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i$  et  $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i$ .

$$\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \text{ sont } z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

3. a)  $|a| = |2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$  puis

$$a = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis  $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

$$a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

b) Voir figure à la fin de l'exercice.

c) On a déjà  $OA = |a| = 4$  et  $OB = |b| = 4$ . Ensuite,  $AB = |b - a| = |4i| = 4$ . Donc  $OA = OB = AB$  et

$$\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}$$

4. L'expression complexe de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  est  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)z$ . Donc

$$z_D = \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-8i) = 4i + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

5. En particulier,  $z_D = 2z_B$  et donc

$$D \text{ est l'image de } B \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } 2.$$

6.  $BD = \frac{1}{2}OD = OB$  et donc  $BD = BO = BA$ . Par suite, le point  $A$  est sur le cercle de diamètre  $[OD]$  (et  $B$  est le centre de ce cercle). On sait alors que

$$\text{le triangle } OAD \text{ est rectangle en } A.$$

