EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances
Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

a) Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b) En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b) Faire une figure et placer les points A et B.

c) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8i$ et D son image par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4i$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.