EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \qquad b = 2 - 2i\sqrt{3}, \qquad c = 3 + 3i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad p = 10.$$

PARTIE A. Etude de la configuration

1. Construction de la figure.

a) Placer les points A et P dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b) Déterminer les modules des nombres complexes b et c.

c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.

2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

3. On note r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que l'image Q du point C par r_A a pour affixe : $q = -4 + 4i\sqrt{3}$.

b) Vérifier l'égalité $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?

4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.

a) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b) Etablir que : $AP = BQ = CR$.

PARTIE B

On note f l'application qui, à tout point M du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = MA + MB + MC.$$

1. Calculer $f(O)$.

2. Soient M un point quelconque et N son image par la rotation r_A.
Démontrer que : $MA = MN$ puis que $MC = NQ$.

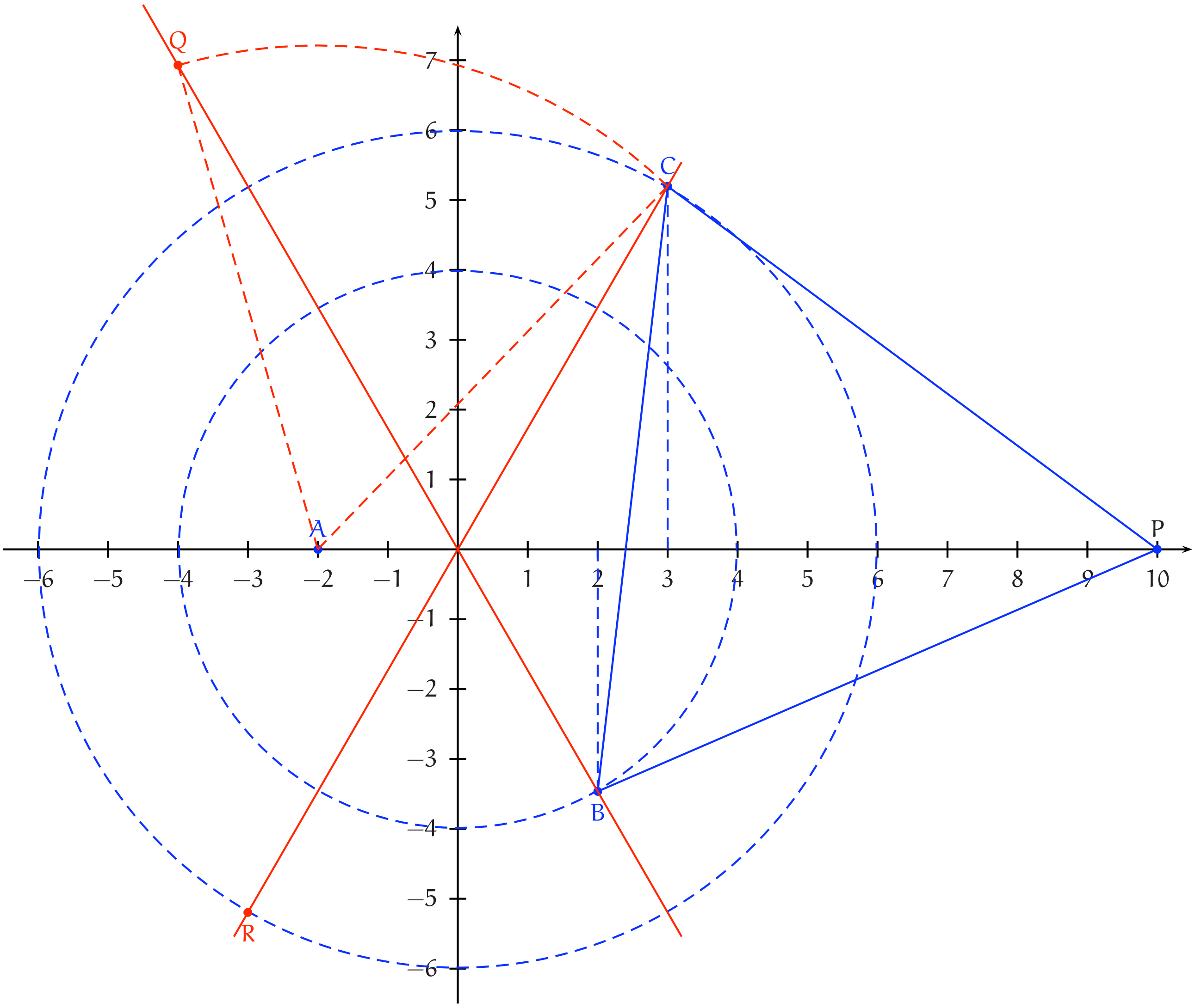
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point M du plan, $f(M) \geqslant 12$.

EXERCICE 2

PARTIE A. Etude de la configuration

1. a)



b) $|b| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$ et $|c| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$.

$$\boxed{OB = |b| = 4 \text{ et } OC = |c| = 6.}$$

c) Voir figure.

2. • $BC = |c - b| = |1 + 5i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+75} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $BP = |p - b| = |8 + 2i\sqrt{3}| = \sqrt{8^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+12} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

• $CP = |p - c| = |7 - 3i\sqrt{3}| = \sqrt{7^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{49+27} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

Donc $BC = BP = CP$ et

$$\boxed{\text{Le triangle BCP est équilatéral.}}$$

3. a) L'expression complexe de la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = -2 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z+2) = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 1 + i\sqrt{3}.$$

Par suite,

$$q = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})(3+3i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3} = \frac{-6+6i\sqrt{3}}{2} - 1 + i\sqrt{3} = -4+4i\sqrt{3}$$

$$\boxed{q = -4+4i\sqrt{3}.}$$

b) On a encore $q = -2(2-2i\sqrt{3}) = -2b$. On en déduit d'abord que $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les points O, B et Q sont alignés.}}$$

4. a) • Les points A et P sont sur l'axe des abscisses de même que le point O. Donc le point O appartient à la droite (AP).
• D'après la question précédente, le point O appartient à la droite (BQ).
• Puisque R est le symétrique de C par rapport à O, le point O est le milieu du segment $[CR]$ et en particulier le point O appartient à la droite (CR).

On a montré que

$$\boxed{\text{Les droites } (AP), (BQ) \text{ et } (CR) \text{ sont concourantes en } O.}$$

b) $AP = |p-a| = 12$, $BQ = |q-b| = |(-4+4i\sqrt{3}) - (2-2i\sqrt{3})| = |-6+6i\sqrt{3}| = 6\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 12$ et $CR = 2OC = 2|c| = 12$.

$$\boxed{AP = BQ = CR = 12.}$$

PARTIE B

1. D'après la question 1.b) de la partie A, $f(O) = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 2+4+6 = 12$.

$$\boxed{f(O) = 12.}$$

2. Soient M un point du plan puis $N = r_A(M)$. En notant m et n les affixes respectives des points M et N, on a
1ère solution. $n = a + e^{i\pi/3}(m-a)$ et donc

$$\begin{aligned} MN = |n-m| &= \left|a + e^{i\pi/3}(m-a) - m\right| = \left|e^{i\pi/3}(m-a) - (m-a)\right| = \left|\left(e^{i\pi/3}-1\right)(m-a)\right| \\ &= \left|e^{i\pi/3}-1\right| \times |m-a| = \left|e^{i\pi/3}-1\right| \times AM, \end{aligned}$$

avec $\left|e^{i\pi/3}-1\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MA = MN.}$$

2ème solution. Puisque $r_A(M) = N$, on a $AM = AN$ et donc le triangle MAN est isocèle en A. Mais on a aussi $\widehat{MAN} = \frac{\pi}{3}$ et donc le triangle MAN est équilatéral (car $\widehat{MNA} = \widehat{NMA} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$). En particulier, on a $MA = MN$.

D'autre part, puisque la rotation r_A est une isométrie, on a $NQ = r_A(M)r_A(C) = MC$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan, } MC = NQ.}$$

3. Soit M un point du plan. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} f(M) = MA + MB + MC &= MN + MB + NQ = BM + MN + NQ \\ &\geqslant BQ = |q-b| = |-2b-b| \text{ (d'après la question A.3.b))} \\ &= |-3b| = 3|b| = 3 \times 4 \text{ (d'après la question A.1.c))} \\ &= 12. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout point } M \text{ du plan, } f(M) \geqslant 12.}$$

