

EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans le plan complexe (\mathcal{P}) muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f , du plan (\mathcal{P}) dans lui-même, qui au point M d'affixe z , distinct de A , associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.
2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O , on a :

$$\arg \frac{OM'}{AM} = \arg \left(\frac{\overrightarrow{OM'}}{\overrightarrow{AM}} \right) = \arg \left(\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MO}} \right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3.
 - a) Soit B le point d'affixe $b = -\frac{1}{2} + i$.
Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment $[OA]$.
 - b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f .
Etablir que B' appartient au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 1.
Placer le point B' et tracer le cercle (\mathcal{C}) dans le repère.
 - c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ) , son image M' par f appartient au cercle (\mathcal{C}) .
 - d) Soit C le point tel que le triangle OAC soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f (on laissera apparent les traits de construction.)
4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.

Les question a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

- a) On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\operatorname{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

- b) A l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ) .

EXERCICE 2

1. Soient z un nombre complexe distinct de -1 puis M le point d'affixe z .

$$M' = M \Leftrightarrow \frac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow z^2 + z = iz \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z = 0 \Leftrightarrow z(z+1-i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = -1+i.$$

Les points M tels que $M' = M$ sont les points d'affixes 0 et $-1+i$.

2. Soit M un point distinct de A et de O . Soit z l'affixe du point M . On a donc $z \neq 0$ et $z \neq a$ puis

$$OM' = |z'| = \left| \frac{iz}{z+1} \right| = \frac{|i| \times |z|}{|z-a|} = \frac{1 \times OM}{AM} = \frac{OM}{AM},$$

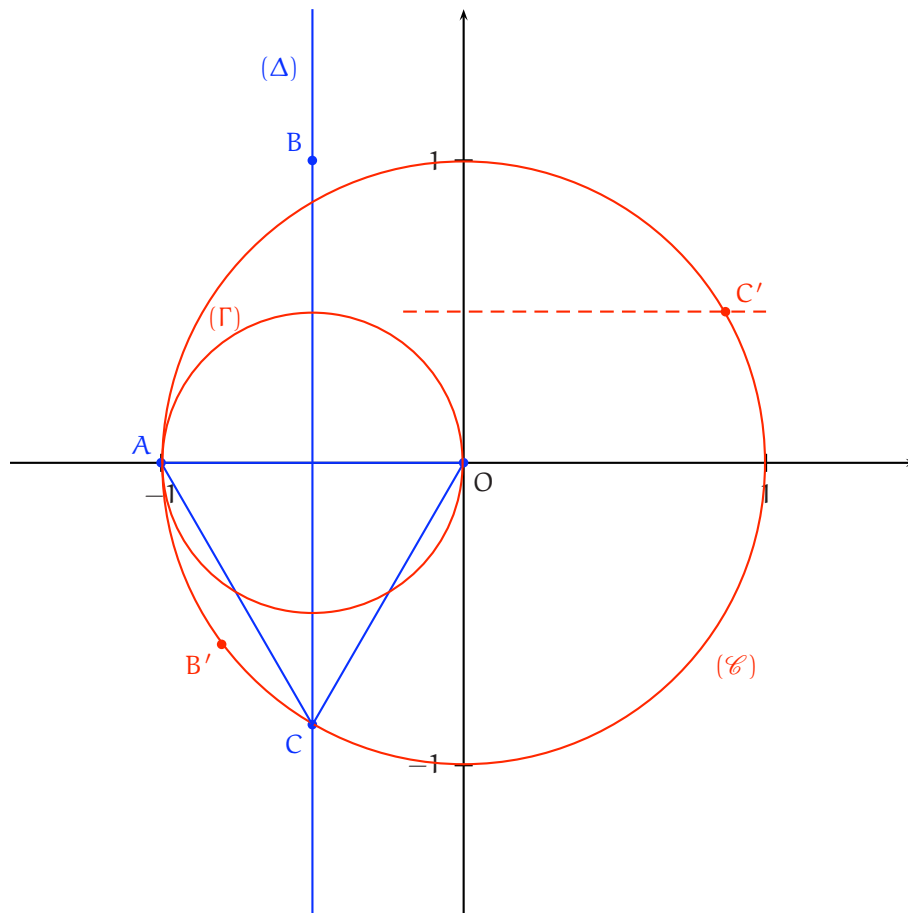
puis

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z+1} \times i \right) = \arg\left(\frac{z-0}{z-a} \right) + \arg(i) = \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM} \right) + \frac{\pi}{2} [2\pi],$$

ou encore $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO} \right) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Pour tout point M distinct de A et de O , $OM' = \frac{OM}{AM}$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO} \right) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

3. a)



$$b) \ b' = \frac{i\left(-\frac{1}{2} + i\right)}{-\frac{1}{2} + i + 1} = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} + i} = \frac{-2 - i}{1 + 2i} = \frac{(-2 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{-4 + 3i}{1^2 + 2^2} = \frac{-4 + 3i}{5}.$$

$$b' = \frac{-4 + 3i}{5}.$$

$$OB' = |b'| = \frac{1}{5}|-4 + 3i| = \frac{1}{5}\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{25}}{5} = 1.$$

c) Soit M un point de la médiatrice du segment $[OA]$. Alors, $OM' = \frac{OM}{AM} = 1$ et donc M' appartient au cercle (\mathcal{C}) .

d) Le point C est à égale distance des points O et A . Donc le point C appartient à la droite (Δ) puis, d'après la question précédente, le point C' appartient au cercle (\mathcal{C}) .

D'autre part, d'après la question 2, $(\vec{u}, \overrightarrow{OC'}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} [2\pi]$. On en déduit que le point C' est le point du cercle (\mathcal{C}) d'ordonnée $\frac{1}{2}$ et d'abscisse strictement positive. Voir figure.

4. a) Soit M un point distinct de O et de A .

$$\begin{aligned} z' &= \frac{iz}{z+1} = \frac{i(x+iy)}{x+iy+1} = \frac{-y+ix}{(x+1)+iy} = \frac{(-y+ix)((x+1-iy))}{(x+1+iy)(x+1-iy)} \\ &= \frac{-y(x+1) + xy + i(x(x+1) + y^2)}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{-y + i(x^2 + y^2 + x)}{(x+1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$. Par suite,

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } z \neq -1 \text{ et } \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x, y) \neq (-1, 0) \text{ et } x^2 + y^2 + x = 0.$$

Maintenant, $x^2 + y^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. (Γ) est donc le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A ou encore le cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A .

(Γ) est le cercle de diamètre $[OA]$ privé des points O et A .

b) Soit M un point du plan. D'après la question 2,

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = 0 [\pi] \Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = -\frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \neq O \text{ et } M \neq A \text{ et } OAM \text{ rectangle en } M \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [OA] \text{ privé de } O \text{ et de } A. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent.