**EXERCICE 2 (5 points )**

**(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point $A$ d'affixe $a = -1$ et l'application $f$, du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même, qui au point $M$ d'affixe $z$, distinct de $A$, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{iz}{z+1}.$$

**1.** Déterminer l'affixe des points $M$ tels que $M' = M$.

**2.** Démontrer que pour tout point $M$ distinct de $A$ et de $O$, on a :

$$OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

**3.** **a)** Soit $B$ le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2} + i$.
Placer dans le repère le point $B$ et la médiatrice $(\Delta)$ du segment $[OA]$.

**b)** Calculer sous forme algébrique l'affixe $b'$ du point $B'$ image du point $B$ par $f$.
Etablir que $B'$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre $O$ et de rayon $1$.
Placer le point $B'$ et tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère.

**c)** En utilisant la question 2, démontrer que, si un point $M$ appartient à la médiatrice $(\Delta)$, son image $M'$ par $f$ appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

**d)** Soit $C$ le point tel que le triangle $OAC$ soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point $C$ par $f$ (on laissera apparent les traits de construction.)

**4.** Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ distincts de $A$ et de $O$ dont l'image $M'$ par $f$ appartient à l'axe des abscisses.

Les question a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

**a)** On pose $z = x + iy$ avec $x$ et $y$ réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de $z'$ est égale à :

$$\text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\Gamma)$ et le tracer dans le repère.

**b)** A l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble $(\Gamma)$.