EXERCICE 4 : **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.
Dans tout l'exercice on note α le nombre complexe $\alpha = 1+i\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ le nombre complexe conjugué du nombre complexe α.

1) a) Démontrer que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$.

b) Démontrer que les points B et C d'affixes respectives α et $\overline{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

2) Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un nombre réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

a) Construire sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point E image du point D par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Justifier que le point E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3) Soient F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Justifier que le point F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

b) On admet que le point G a pour affixe $z_G = \dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2}$.

Démontrer que $\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2} = \dfrac{\alpha}{2}$. On pourra utiliser la question **1) a)**.

En déduire que le triangle AFG est équilatéral.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on conjecture qu'il existe une position du point D, défini à la question 2, pour laquelle la longueur du coté AF du triangle AFG est minimale.

On admet que $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-\pi\,;+\pi]$ par $f(x) = 4 - 3\cos x + \sqrt{3}\sin x$.

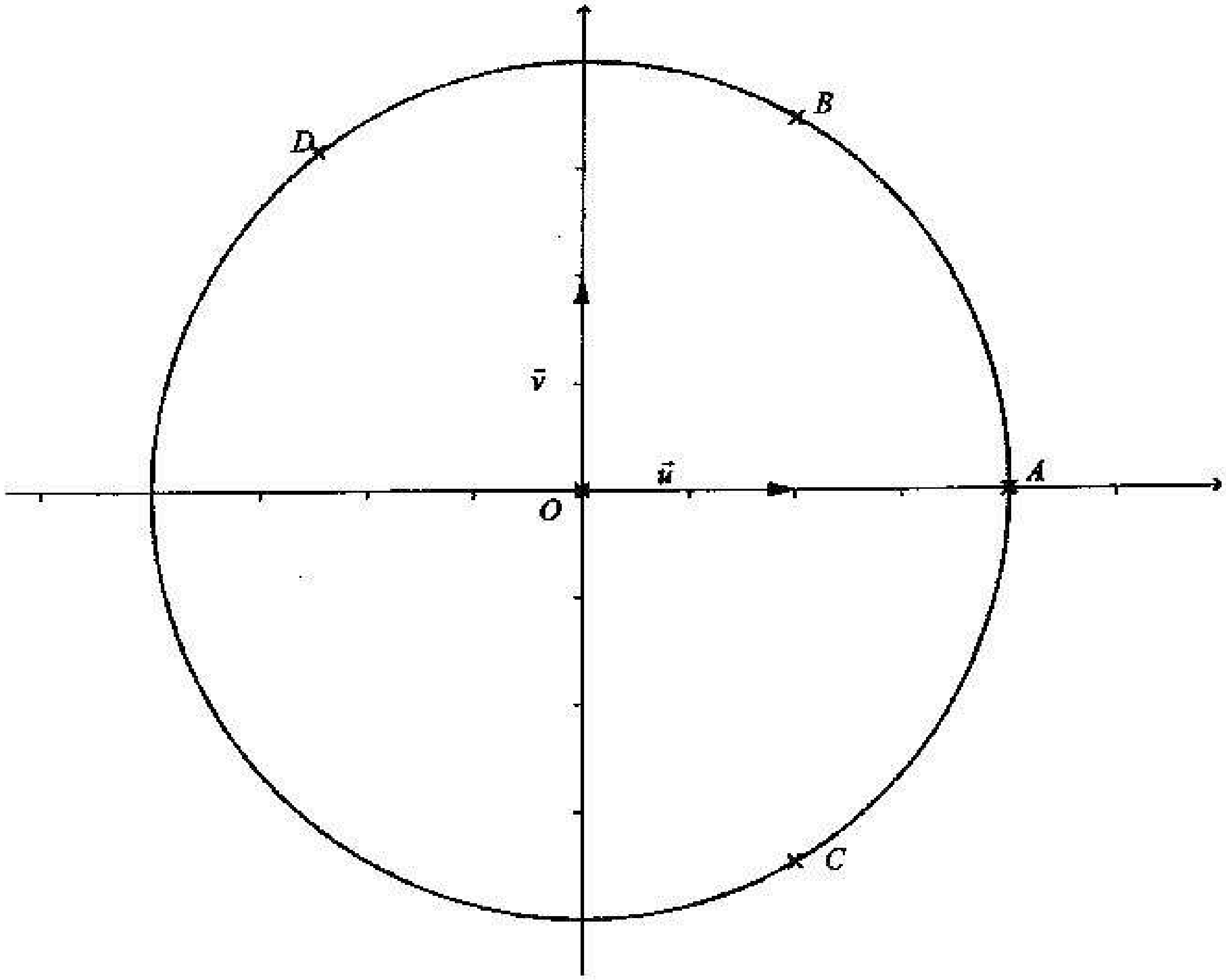
Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;+\pi]$.

Compléter ce tableau de variation. Permet-il de valider la conjecture ? Justifier.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ANNEXE 2 (Exercice 4)
(à rendre avec la copie)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)



EXERCICE 4

1 a)

$$\alpha^2 - 4\alpha + 8 = (1 + i\sqrt{3})^2 - 4(1 + i\sqrt{3}) + 8 = (1 + 2i\sqrt{3} - 3) - 4 - 4i\sqrt{3} + 8 = 2 - 2i\sqrt{3}$$
$$= 2(1 - i\sqrt{3}) = 2\overline{\alpha},$$

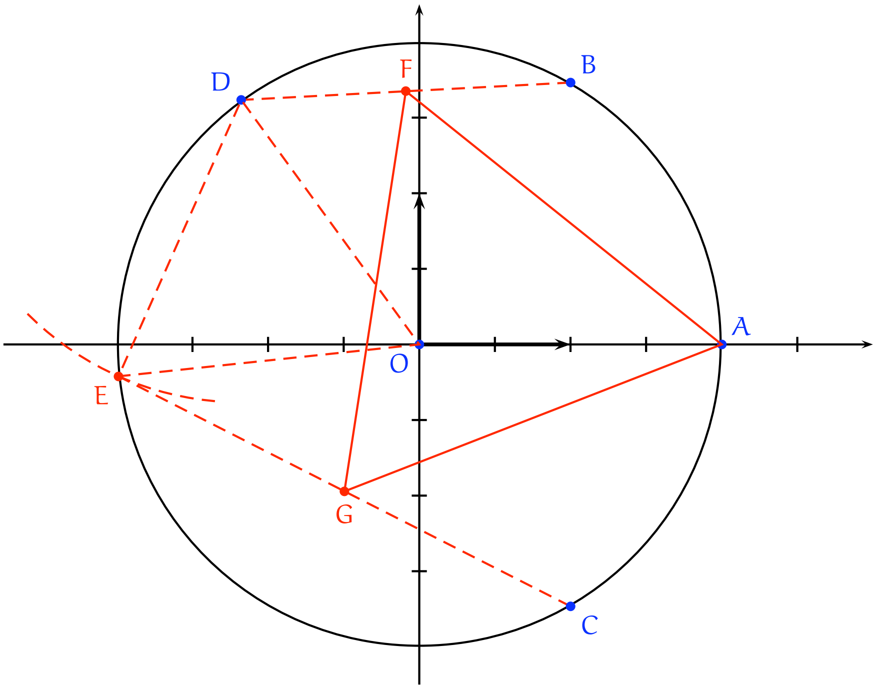
et donc

$$\boxed{\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8.}$$

b) Le cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 2. Or $OB = |\alpha| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ puis $OC = |\overline{\alpha}| = |\alpha| = 2$. Donc

$$\boxed{\text{les points } B \text{ et } C \text{ appartiennent au cercle } (\mathscr{C}).}$$

2 a) Le point E est le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que le triangle ODE soit équilatéral direct.



b) L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est

$$z' = e^{i\pi/3}z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \frac{\alpha}{2}z.$$

En particulier, $z_E = z'_D = \dfrac{\alpha}{2}z_D = \dfrac{\alpha}{2} \times 2e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_E = \alpha e^{i\theta}.}$$

3) a) $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.}$$

b) Tout d'abord, $F \neq A$. En effet, si le milieu F de la corde $[BD]$ est le point A, en particulier, le milieu F de la corde $[BD]$ est sur le cercle c ce qui impose $B = D = F \neq A$. Donc, si $F = A$, on obtient une contradiction. Ensuite,

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\overline{\alpha} - 8}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)}$$

$$= \frac{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} \text{ (d'après la question 1)a))}$$

$$= \frac{\alpha(2e^{i\theta} + \alpha - 4)}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}.}$$

$\dfrac{AG}{AF} = \dfrac{|z_G - 2|}{|z_F - 2|} = \left|\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = \dfrac{|\alpha|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Donc, $AG = AF$ et le triangle AFG est isocèle en A. De plus,

$$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arg\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

En résumé, le triangle AFG est isocèle en A et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } AFG \text{ est équilatéral.}}$$

4) Tout d'abord, AF est minimal si et seulement si AF^2 est minimal avec $AF^2 = f(\theta)$.
Ensuite, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$ et $f(\pi) = 4 - 3(-1) + 0 = 7$ ce qui permet de compléter le tableau de variation.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f		$\searrow$	$4 - 2\sqrt{3}$	$\nearrow$		$\searrow$	7

Ce tableau de variation montre que la fonction f admet un minimum (ce qui valide la conjecture) en $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et que ce minimum vaut $4 - 2\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{La valeur minimale de } AF \text{ est } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.}$$

