**EXERCICE 4**

**1 a)**

$$\begin{aligned}\alpha^2 - 4\alpha + 8 &= (1+i\sqrt{3})^2 - 4(1+i\sqrt{3}) + 8 = (1+2i\sqrt{3}-3) - 4 - 4i\sqrt{3} + 8 = 2 - 2i\sqrt{3}\\ &= 2(1-i\sqrt{3}) = 2\overline{\alpha},\end{aligned}$$

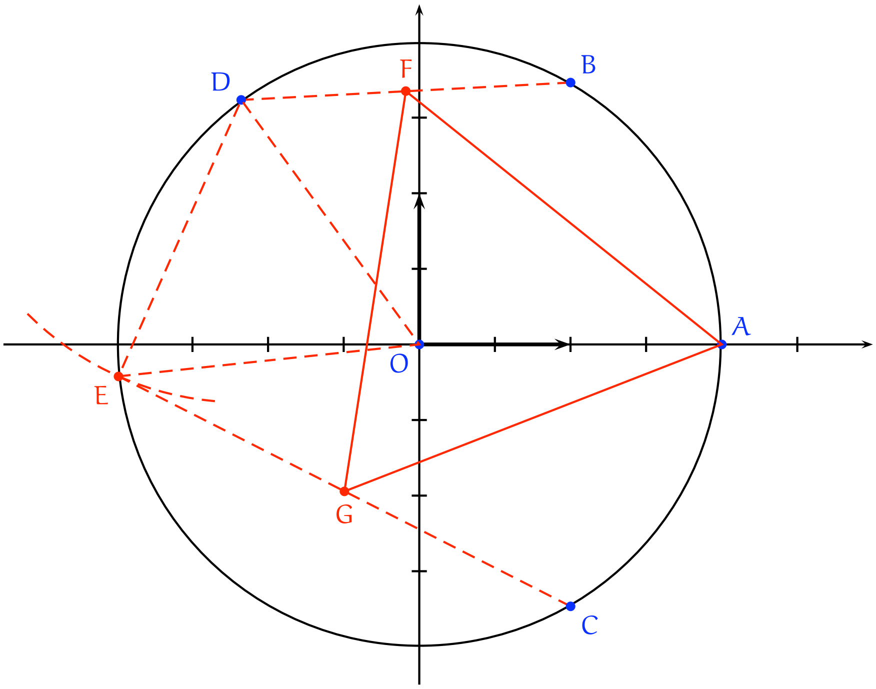
et donc

$$\boxed{\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8.}$$

**b)** Le cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $O$ et de rayon $2$. Or $OB = |\alpha| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ puis $OC = |\overline{\alpha}| = |\alpha| = 2$. Donc

$$\boxed{\text{les points } B \text{ et } C \text{ appartiennent au cercle } (\mathscr{C}).}$$

**2 a)** Le point $E$ est le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que le triangle $ODE$ soit équilatéral direct.




**b)** L'expression complexe de la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est

$$z' = e^{i\pi/3}z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \frac{\alpha}{2}z.$$

En particulier, $z_E = z'_D = \dfrac{\alpha}{2}z_D = \dfrac{\alpha}{2} \times 2e^{i\theta} = \alpha e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_E = \alpha e^{i\theta}.}$$

**3) a)** $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2e^{i\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$.

$$\boxed{z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}.}$$

**b)** Tout d'abord, $F \neq A$. En effet, si le milieu $F$ de la corde $[BD]$ est le point $A$, en particulier, le milieu $F$ de la corde $[BD]$ est sur le cercle $c$ ce qui impose $B = D = F \neq A$. Donc, si $F = A$, on obtient une contradiction. Ensuite,

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\dfrac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha}}{2} - 2}{\dfrac{\alpha}{2} + e^{i\theta} - 2} = \frac{\alpha e^{i\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2e^{i\theta} - 4} = \frac{2\alpha e^{i\theta} + 2\overline{\alpha} - 8}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)}$$

$$= \frac{2\alpha e^{i\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} \text{ (d'après la question 1)a))}$$

$$= \frac{\alpha(2e^{i\theta} + \alpha - 4)}{2(\alpha + 2e^{i\theta} - 4)} = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\boxed{\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}.}$$

$\dfrac{AG}{AF} = \dfrac{|z_G - 2|}{|z_F - 2|} = \left|\dfrac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = \dfrac{|\alpha|}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. Donc, $AG = AF$ et le triangle $AFG$ est isocèle en $A$. De plus,

$$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \arg\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \arg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arg\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \ [2\pi].$$

En résumé, le triangle $AFG$ est isocèle en $A$ et $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et donc

$$\boxed{\text{le triangle } AFG \text{ est équilatéral.}}$$

**4)** Tout d'abord, $AF$ est minimal si et seulement si $AF^2$ est minimal avec $AF^2 = f(\theta)$.
Ensuite, $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 4 - 2\sqrt{3}$ et $f(\pi) = 4 - 3(-1) + 0 = 7$ ce qui permet de compléter le tableau de variation.

| $x$ | $-\pi$ | | $-\dfrac{\pi}{6}$ | | $\dfrac{5\pi}{6}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | $4 - 2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $7$ |

Ce tableau de variation montre que la fonction $f$ admet un minimum (ce qui valide la conjecture) en $x = -\dfrac{\pi}{6}$ et que ce minimum vaut $4 - 2\sqrt{3}$.

$$\boxed{\text{La valeur minimale de } AF \text{ est } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.}$$