EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions

a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
   a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.
2. a) Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1 + \sqrt{3}$.
   b) Déterminer l'affixe z_F du point F.
   c) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.
   d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Polynésie

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

a) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))}\\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$

b) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

• C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = \left(\overline{z}\right)^1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après a))}\\ &= \left(\overline{z}\right)^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= \left(\overline{z}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n.}$

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$, $z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4$. D'autre part, puisque -4 est un nombre réel, $z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow \left(\overline{z}\right)^4 = -4$. On a montré que

$\boxed{\text{si } z \text{ est solution de } (E) \text{ alors } -z \text{ et } \overline{z} \text{ sont solutions de } (E).}$

2. **a)** $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$\boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.}$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3. L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et $-\overline{z_0} = -1 + i$.

$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet pour solutions } 1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i \text{ et } -1 - i.}$

Partie C

1. L'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$. Donc l'expression complexe de la rotation r est

$$\begin{aligned}
z' &= -1-i+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(z+1+i) = -1-i+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(z+1+i) \\
&= \frac{1}{2}(-2-2i)+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(1+i) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(-2-2i+1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}+i) \\
&= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))
\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
z_E &= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z_B+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(-1+i)+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = -1+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = -1+\sqrt{3}.}$$

b)

$$\begin{aligned}
z_F &= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z_D+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(1-i)+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = -i(1+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -i(1+\sqrt{3}).}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F} &= \frac{1+i-(-1+\sqrt{3})}{1+i+i(1+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}+i}{1+i(2+\sqrt{3})} = (2-\sqrt{3})\frac{1+\dfrac{i}{2-\sqrt{3}}}{1+i(2+\sqrt{3})} \\
&= (2-\sqrt{3})\frac{1+i(2+\sqrt{3})}{1+i(2+\sqrt{3})} \text{ (car } (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1) \\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\dfrac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ est un nombre réel.

d) Un réel non nul admet pour argument 0 ou π modulo 2π et donc

$$\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{EA}\right) = \arg\left(\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F}\right) = 0\ [\pi].$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les points } A,\ E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$$

