EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z=a+bi$ où a et b sont deux nombres réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z}=a-bi$.

Questions

a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z, $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0=1+i$.
   a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :
$z_A=1+i$, $z_B=-1+i$, $z_C=-1-i$ et $z_D=1-i$.

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r.
2. a) Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E, est égale à $-1+\sqrt{3}$.
   b) Déterminer l'affixe z_F du point F.
   c) Démontrer que le quotient $\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ est un réel.
   d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?