EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-c)\quad[2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\quad[2\pi]$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe $1+\mathrm{i}$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z-1-\mathrm{i}}{z}$.
Le point M' est appelé le point image du point M.

1) a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B', image du point B d'affixe i.

b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z'\neq 1$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'|=1$.

3) Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 4
Partie I Restitution organisée de connaissances

Puisque $A \neq B$ et $A \neq C$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ existe et $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$ existe. Ensuite,

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi].$$

Partie II

1) a) On continue à noter a, b, ...les affixes des points A, B, ...

$$b' = \frac{b-1-i}{b} = \frac{i-1-i}{i} = -\frac{1}{i} = -\frac{-i}{i\times(-i)} = i.$$

$$\boxed{b' = i = b.}$$

b) Soit z un nombre complexe non nul. $z'-1 = \dfrac{z-1-i}{z} - 1 = -\dfrac{1+i}{z} \neq 0$. Donc

$$\boxed{\text{pour tout point } M \text{ d'affixe } z \text{ non nulle, on a } z' \neq 1.}$$

2) Soit M un point du plan d'affixe non nulle z.

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z| \Leftrightarrow MA = MO \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA],$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice de $[OA]$ privée du point O, c-est-à-dire la médiatrice de $[OA]$, O n'appartenant pas à la médiatrice de $[OA]$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ tels que } |z'| = 1 \text{ est la médiatrice du segment } [OA].}$$

Déterminons une équation cartésienne de cette médiatrice. On note (x, y) les coordonnées du point M.

$$MA = MO \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Une équation de la médiatrice du segment $[OA]$ est $y = -x + 1$.

3) Soit M un point du plan d'affixe non nulle z.

$$\begin{aligned}
z' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z' = 0 \text{ ou}(z' \neq 0 \text{ et } \arg(z') = 0\ [\pi]) \Leftrightarrow z = 1+i \text{ ou } \left(z \neq 1+i \text{ et } \arg\left(\frac{z-(1+i)}{z}\right) = 0\ [\pi]\right) \\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(M \neq A \text{ et } \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0\ [\pi]\right. \\
&\Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } O,\ A \text{ et } M \text{ alignés}) \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (OA) \text{ privée du point } O.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ tels que } z' \in \mathbb{R} \text{ est la droite } (OA) \text{ privée du point } O.}$$

Une équation cartésienne de la droite (OA) est $y = x$.

