

EXERCICE 4

Partie I Restitution organisée de connaissances

Puisque $A \neq B$ et $A \neq C$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ existe et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ existe. Ensuite,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) [2\pi].$$

Partie II

1) a) On continue à noter a, b, \dots les affixes des points A, B, \dots

$$b' = \frac{b-1-i}{b} = \frac{i-1-i}{i} = -\frac{1}{i} = -\frac{-i}{i \times (-i)} = i.$$

$$b' = i = b.$$

b) Soit z un nombre complexe non nul. $z' - 1 = \frac{z-1-i}{z} - 1 = -\frac{1+i}{z} \neq 0$. Donc

pour tout point M d'affixe z non nulle, on a $z' \neq 1$.

2) Soit M un point du plan d'affixe non nulle z .

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-(1+i)|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |z-z_A| = |z| \Leftrightarrow MA = MO \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA],$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice de $[OA]$ privée du point O , c'est-à-dire la médiatrice de $[OA]$, O n'appartenant pas à la médiatrice de $[OA]$.

L'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment $[OA]$.

Déterminons une équation cartésienne de cette médiatrice. On note (x, y) les coordonnées du point M .

$$MA = MO \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

Une équation de la médiatrice du segment $[OA]$ est $y = -x + 1$.

3) Soit M un point du plan d'affixe non nulle z .

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z' = 0 \text{ ou } (z' \neq 0 \text{ et } \arg(z') = 0 [\pi]) \Leftrightarrow z = 1+i \text{ ou } (z \neq 1+i \text{ et } \arg\left(\frac{z-(1+i)}{z}\right) = 0 [\pi])$$

$$\Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}) = 0 [\pi])$$

$$\Leftrightarrow M = A \text{ ou } (M \neq A \text{ et } O, A \text{ et } M \text{ alignés})$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite } (OA) \text{ privée du point } O.$$

L'ensemble des points M tels que $z' \in \mathbb{R}$ est la droite (OA) privée du point O .

Une équation cartésienne de la droite (OA) est $y = x$.