EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - i$, $b = -2 + 4i$, $c = 3 - i$ et $h = -2$.
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G.
Placer G sur la figure.

5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circoncscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.

6. On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

a. Déterminer l'affixe du point K.

b. Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

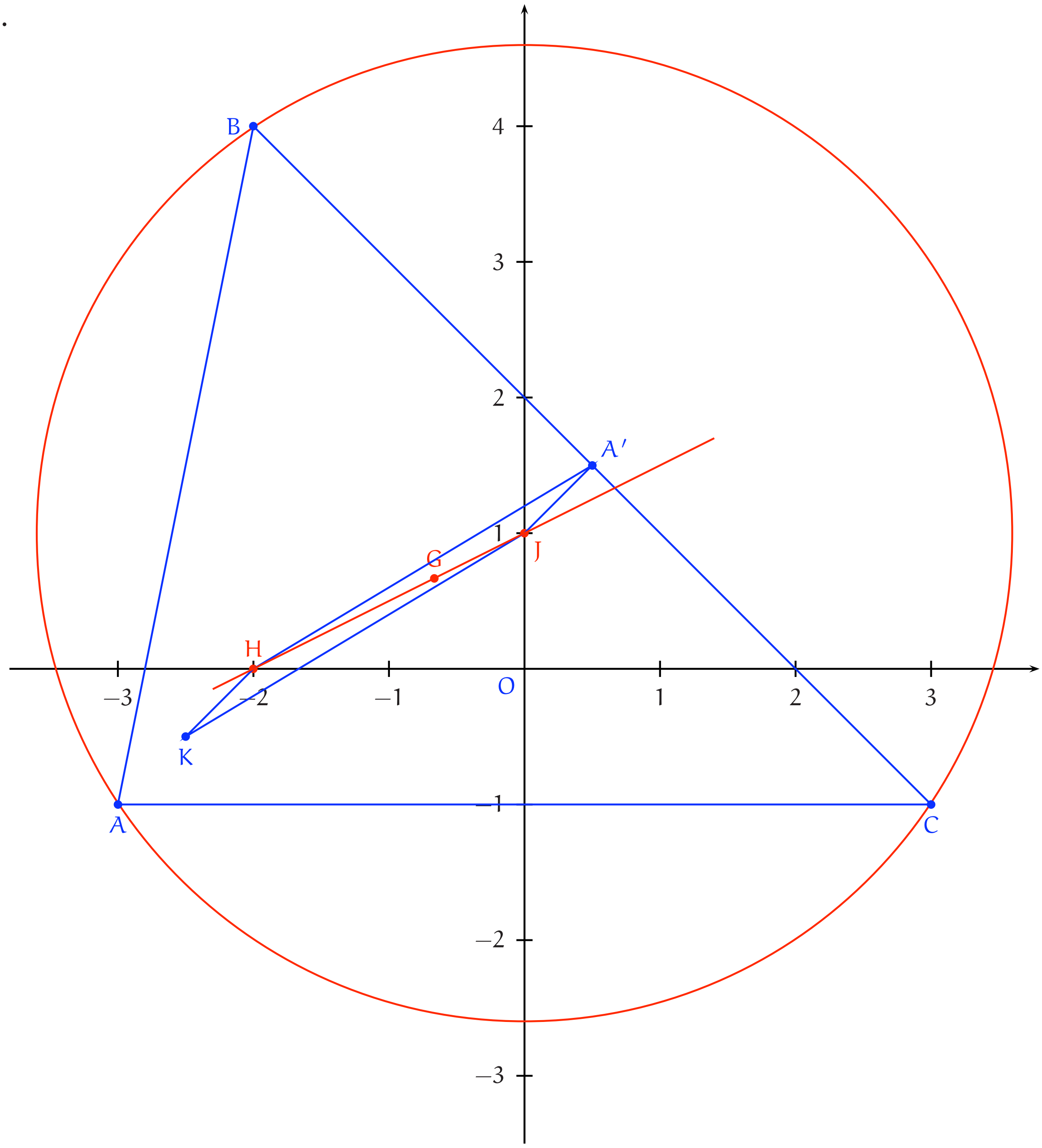
- Série S -

Enseignement Obligatoire

AntillesGuyane

EXERCICE 1

1) Figure.



2) • $JA = |a - i| = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

• $JB = |b - i| = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

• $JC = |c - i| = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

En résumé, $JA = JB = JC = \sqrt{13}$ et donc

$$\boxed{\text{le point J est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC dont le rayon est } \sqrt{13}.}$$

3) $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{(-2+4i)-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \dfrac{-5+5i}{1+i} = \dfrac{5i(1+i)}{1+i} = 5i$. En particulier,

$$\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{h-a}\right) = \arg(5i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

ou encore,

$$\boxed{\text{les droites } (AH) \text{ et } (BC) \text{ sont perpendiculaires.}}$$

4) Le centre de gravité du triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C. Donc

$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4i+3-i}{3} = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i.$$

5) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JG}$ est $g-i = -\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}i-i = -\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{JH}$ est $h-i = -2-i$.
Donc $h-i = 3(g-i)$ ou encore $\overrightarrow{JH} = 3\overrightarrow{JG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{JH}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires ou encore les points G, J et H sont alignés.

6) a) On note k l'affixe du point K.

$$k = \frac{a+h}{2} = \frac{-3-i-2}{2} = -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point } K \text{ est } -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i.}$$

b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{HA'}$ est $a'-h = \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i-(-2) = \dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ est $i-k = i-\left(-\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Ainsi, $a'-h = i-k$ ou encore $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{KJ}$ et par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } KHA'J \text{ est un parallélogramme.}}$$

