EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5i$ et $c = 4$ ainsi que les carrés $ABIJ$, $AKLC$ et $BCMN$, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.
La figure est donnée en **annexe 2.**

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7 + 2i$.
On admettra que l'affixe du point K est $-2 - 6i$.

2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments $[BK]$ et $[JC]$ ont la même longueur. Calculer cette longueur.

3. **a.** Calculer les affixes des points S et T.

b. Déterminer l'affixe du point U.

c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.

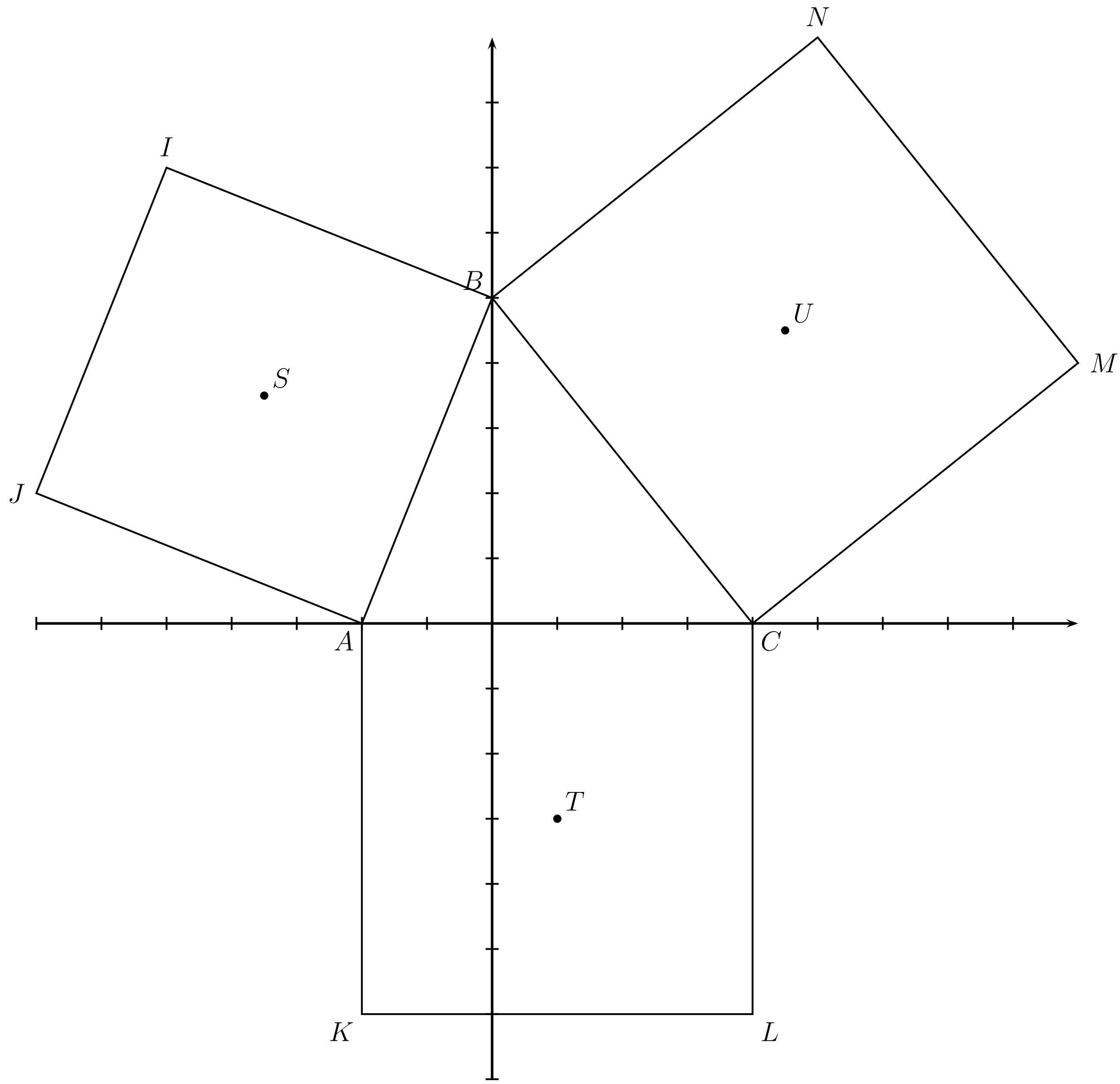
4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right)$.

5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0,752 + 0,864i$.

a. Établir que les points A, V et U sont alignés.

b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{BVC}$?

Annexe 2, exercice 2
Commun à tous les candidats



EXERCICE 2

1) L'expression complexe de r est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = -2 + i(z+2) = iz - 2 + 2i$. Donc, puisque $J = r(B)$, en notant j l'affixe du point J, on a

$$j = i(5i) - 2 + 2i = -5 - 2 + 2i = -7 + 2i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point J est } -7+2i.}$$

2) Le point B a pour coordonnées $(0, 5)$ et le point K a pour coordonnées $(-2, -6)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $(-2, -11)$.
De même, le point J a pour coordonnées $(-7, 2)$ et le point C a pour coordonnées $(4, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{JC}$ a pour coordonnées $(11, -2)$. Par suite,

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{JC} = (-2) \times 11 + (-11) \times (-2) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont orthogonaux ou encore les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires.

$BK = \left\|\overrightarrow{BK}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ et $JC = \left\|\overrightarrow{JC}\right\| = \sqrt{11^2 + (-2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Donc $BK = JC = 5\sqrt{5}$.

3) a) S est le milieu du segment $[BJ]$ et donc

$$s = \frac{b+j}{2} = \frac{5i - 7 + 2i}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i.$$

De même, T est le milieu du segment $[KC]$ et donc (en notant k l'affixe du point K)

$$t = \frac{k+c}{2} = \frac{-2 - 6i + 4}{2} = 1 - 3i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point S est } -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i \text{ et l'affixe du point T est } 1 - 3i.}$$

b) C est l'image de B par la rotation de centre U et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $c = u + e^{i\pi/2}(b - u) = u + i(b - u) = (1 - i)u + ib$ puis

$$u = \frac{c - ib}{1 - i} = \frac{4 - i(5i)}{1 - i} = \frac{9(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{9 + 9i}{1^2 + (-1)^2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point U est } \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i.}$$

c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AU}$ sont $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}\right)$. Donc,

$$\overrightarrow{AU}.\overrightarrow{ST} = \left(\frac{13}{2}\right) \times \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \times \left(-\frac{13}{2}\right) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont orthogonaux ou encore la droite (AU) est la hauteur issue de U du triangle STU.

4) On sait que $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \arg\left(\frac{u - a}{c - j}\right)$ $[2\pi]$. Or

$$\frac{u - a}{c - j} = \frac{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}i - (-2)}{4 - (-7 + 2i)} = \frac{\frac{13}{2} + \frac{9}{2}i}{11 - 2i} = \frac{1}{2} \times \frac{(13 + 9i)(11 + 2i)}{(11 - 2i)(11 + 2i)} = \frac{1}{2} \times \frac{143 + 26i + 99i - 18}{11^2 + (-2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{125 + 125i}{125} = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Par suite,

$$\frac{u - a}{c - j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que $\arg\left(\frac{u - a}{c - j}\right) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou encore

$$\boxed{\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].}$$

5) a) Le vecteur $\overrightarrow{AV}$ a pour coordonnées $(1,248; 0,864)$ et le vecteur $\overrightarrow{AU}$ a pour coordonnées $(6,5; 4; 5)$.
Or $\dfrac{6,5}{1,248} \times 1,248 = 6,5$ et $\dfrac{6,5}{1,248} \times 0,864 = 4,5$ et donc $\dfrac{6,5}{1,248}\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AU}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{AV}$ sont colinéaires ou encore que

$$\boxed{\text{les points } A,\ V \text{ et } U \text{ sont alignés.}}$$

b) D'après la question 4), $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$. Comme le point V appartient aux segments $[JC]$ et $[AU]$, on a aussi $\left(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{VU}\right) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ puis $\widehat{CVU} = 45°$.
D'après la question 2), les segments $[BK]$ et $[JC]$ sont perpendiculaires. Il en est de même des segments $[VC]$ et $[VB]$. Puisque le point B est de l'autre côté de C par rapport à la droite (VU), on a $\widehat{UVB} = \widehat{CVB} - \widehat{CVU} = 90 - 45 = 45°$.
Ainsi, la droite (VU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$ et, puisque les points A, V et U sont alignés,

$$\boxed{\text{la droite } (AU) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{BVC}.}$$