EXERCICE 2

1) L'expression complexe de r est $z' = a + e^{i\pi/2}(z-a) = -2 + i(z+2) = iz - 2 + 2i$. Donc, puisque $J = r(B)$, en notant j l'affixe du point J, on a

$$j = i(5i) - 2 + 2i = -5 - 2 + 2i = -7 + 2i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point J est } -7+2i.}$$

2) Le point B a pour coordonnées $(0,5)$ et le point K a pour coordonnées $(-2,-6)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $(-2,-11)$.
De même, le point J a pour coordonnées $(-7,2)$ et le point C a pour coordonnées $(4,0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{JC}$ a pour coordonnées $(11,-2)$. Par suite,

$$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{JC} = (-2)\times 11 + (-11)\times(-2) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{JC}$ sont orthogonaux ou encore les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires.

$BK = \left\|\overrightarrow{BK}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-11)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ et $JC = \left\|\overrightarrow{JC}\right\| = \sqrt{11^2+(-2)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$. Donc $BK = JC = 5\sqrt{5}$.

3) a) S est le milieu du segment $[BJ]$ et donc

$$s = \frac{b+j}{2} = \frac{5i-7+2i}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}i.$$

De même, T est le milieu du segment $[KC]$ et donc (en notant k l'affixe du point K)

$$t = \frac{k+c}{2} = \frac{-2-6i+4}{2} = 1-3i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point S est } -\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i \text{ et l'affixe du point T est } 1-3i.}$$

b) C est l'image de B par la rotation de centre U et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Donc $c = u + e^{i\pi/2}(b-u) = u + i(b-u) = (1-i)u + ib$ puis

$$u = \frac{c-ib}{1-i} = \frac{4-i(5i)}{1-i} = \frac{9(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{9+9i}{1^2+(-1)^2} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}i.$$

$$\boxed{\text{L'affixe du point U est } \frac{9}{2}+\frac{9}{2}i.}$$

c) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AU}$ sont $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ST}$ sont $\left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}\right)$. Donc,

$$\overrightarrow{AU}.\overrightarrow{ST} = \left(\frac{13}{2}\right)\times\frac{9}{2} + \frac{9}{2}\times\left(-\frac{13}{2}\right) = 0,$$

et donc les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont orthogonaux ou encore la droite (AU) est la hauteur issue de U du triangle STU.

4) On sait que $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \arg\left(\frac{u-a}{c-j}\right)$ $[2\pi]$. Or

$$\frac{u-a}{c-j} = \frac{\frac{9}{2}+\frac{9}{2}i-(-2)}{4-(-7+2i)} = \frac{\frac{13}{2}+\frac{9}{2}i}{11-2i} = \frac{1}{2}\times\frac{(13+9i)(11+2i)}{(11-2i)(11+2i)} = \frac{1}{2}\times\frac{143+26i+99i-18}{11^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\times\frac{125+125i}{125} = \frac{1}{2}(1+i).$$

Par suite,

$$\frac{u-a}{c-j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}.$$

On en déduit que $\arg\left(\frac{u-a}{c-j}\right) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou encore

$$\boxed{\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].}$$

5) a) Le vecteur $\overrightarrow{AV}$ a pour coordonnées $(1,248; 0,864)$ et le vecteur $\overrightarrow{AU}$ a pour coordonnées $(6,5; 4; 5)$.
Or $\dfrac{6,5}{1,248} \times 1,248 = 6,5$ et $\dfrac{6,5}{1,248} \times 0,864 = 4,5$ et donc $\dfrac{6,5}{1,248}\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{AU}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{AV}$ sont colinéaires ou encore que

$$\boxed{\text{les points } A, V \text{ et } U \text{ sont alignés.}}$$

b) D'après la question 4), $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$. Comme le point V appartient aux segments $[JC]$ et $[AU]$, on a aussi $\left(\overrightarrow{VC}, \overrightarrow{VU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ puis $\widehat{CVU} = 45°$.
D'après la question 2), les segments $[BK]$ et $[JC]$ sont perpendiculaires. Il en est de même des segments $[VC]$ et $[VB]$. Puisque le point B est de l'autre côté de C par rapport à la droite (VU), on a $\widehat{UVB} = \widehat{CVB} - \widehat{CVU} = 90 - 45 = 45°$.
Ainsi, la droite (VU) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BVC}$ et, puisque les points A, V et U sont alignés,

$$\boxed{\text{la droite } (AU) \text{ est la bissectrice de l'angle } \widehat{BVC}.}$$