

Exercice 3 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' , $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' , on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - i \text{ et } z_B = 2 + \sqrt{3} + i.$$

- Déterminer le module et un argument de z_A .
- Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
 - Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - En déduire la forme exponentielle de z_B .
- On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
 - Déterminer l'affixe du point B_1 .
 - En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
- Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

- Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).
- Soit M un point distinct du point O.
Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

- Déterminer l'ensemble (E).

EXERCICE 3

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) + \arg(z') = \arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = \arg(z) [2\pi],$$

et donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.

PARTIE B

1) $|z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_A = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

$$|z_A| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

2) a)

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i + i - 1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

b) Donc,

$$\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (1 + \sqrt{3}) \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = (1 + \sqrt{3}) e^{i\pi/3}.$$

c) Puis, d'après la question 1),

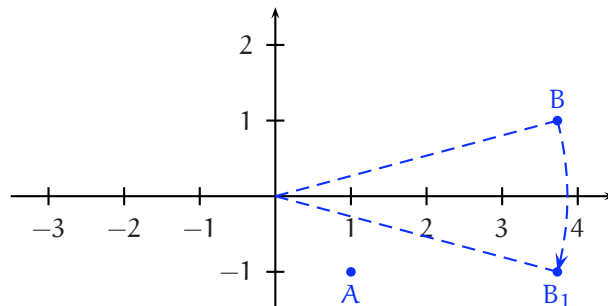
$$z_B = (1 + \sqrt{3}) e^{i\pi/3} z_A = (1 + \sqrt{3}) e^{i\pi/3} \times \sqrt{2} e^{-i\pi/4} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\pi/12}.$$

$$z_B = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\pi/12}.$$

3) a) $z_{B_1} = e^{-i\pi/6} z_B = e^{-i\pi/6} (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\pi/12} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{-i\pi/12}$.

b) $z_{B_1} = \overline{\left((\sqrt{2} + \sqrt{6}) e^{i\pi/12} \right)} = \overline{z_B}$ et donc

B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.



4) a) On note s la symétrie par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$

D'après la question 3)b), le point B appartient à (E). D'autre part, $O_1 = r(O) = O$ puis $O' = s(O_1) = s(O) = O$. Donc les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b) $z_1 = e^{-i\pi/6} z = e^{-i\pi/6} \times \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})}$ puis

$$z' = \overline{z_1} = \overline{(\rho e^{i(\theta - \frac{\pi}{6})})} = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}.$$

Soit M un point du plan distinct de O , d'affixe $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} = e^{i\theta} \text{ (car } \rho \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{6} - \theta + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

c) Soit M un point du plan. On note z son affixe.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{12} [\pi] \right) \Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) [\pi] \right) \\ &\Leftrightarrow M = O \text{ ou } \left(M \neq O \text{ et } (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 0 [\pi] \right) \\ &\Leftrightarrow O, B \text{ et } M \text{ alignés} \Leftrightarrow M \in (OB). \end{aligned}$$

L'ensemble (E) est la droite (OB) .