Exercice 3 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à 2π près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = 2 + \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}.
2. a) Écrire $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique.

   b) Montrer que $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}} = (1+\sqrt{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   c) En déduire la forme exponentielle de z_{B}.
3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

   a) Déterminer l'affixe du point B_1.

   b) En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{u})$.
4. Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(\mathrm{O}\,;\vec{u})$.

   On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$.

   a) Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

   b) Soit M un point distinct du point O.
   Son affixe z est égale à $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

   Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

   c) Déterminer l'ensemble (E).