

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A , G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O .

On note d , g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h .
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m . On appelle N l'image de M par r_A , P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O .

On note n , p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3. a) Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'expression complexe de r_A est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = i + i(z - i) = iz + 1 + i$. Donc

$$d = ic + 1 + i = i(3i) + 1 + i = -3 + 1 + i = -2 + i.$$

$$d = -2 + i.$$

2) De même, l'expression complexe de r_B est $z' = b + e^{i\pi/2}(z - b) = 1 + i + i(z - 1 - i) = iz + 1 + i - i + 1 = iz + 2$ et l'expression complexe de r_O est $z' = e^{-i\pi/2}z = -iz$. Donc

$$g = id + 2 = i(-2 + i) + 2 = -2i - 1 + 2 = 1 - 2i \text{ et } h = -ic = -i(3i) = 3.$$

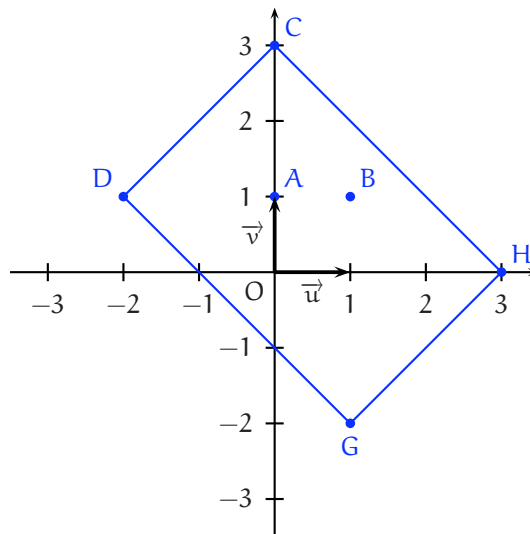
$$g = 1 - 2i \text{ et } h = 3.$$

3) Les coordonnées des points C, D, G et H sont : C(0, 3), D(-2, 1), G(1, -2) et H(3, 0). Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{DC} sont (2, 2) et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{GH} sont (2, 2). Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH}$ et par suite le quadrilatère CDGH est un parallélogramme. De plus, les coordonnées du vecteur \overrightarrow{DG} sont (3, -3) et donc

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DG} = 2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0.$$

On en déduit que $(DC) \perp (DG)$. Ainsi, le parallélogramme CDGH possède un angle droit et on a montré que

le quadrilatère CDGH est un rectangle.



Partie B

1) D'après la question 1 de la partie A, l'écriture complexe de la rotation r_A est $z' = iz + 1 + i$ et donc $n = im + 1 + i$.

2) $n - m = im + 1 + i - m = (-1 + i)m + 1 + i$ et $p - q = -m + 1 + i + im = (-1 + i)m + 1 + i$. Donc $n - m = p - q$ ou encore $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Par suite,

le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

3) a) $p - n = -m + 1 + i - im - 1 - i = -(1 + i)m \neq 0$ (car $M \neq O$ et donc $m \neq 0$) puis $m - n = m - im - 1 - i = (1 - i)m - (1 + i)$.
Donc

$$\begin{aligned} \frac{m - n}{p - n} &= \frac{(1 - i)m - (1 + i)}{-(1 + i)m} = \frac{(1 - i)m}{-(1 + i)m} + \frac{-(1 + i)}{-(1 + i)m} = -\frac{1 - i}{1 + i} + \frac{1}{m} \\ &= -\frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} + \frac{1}{m} = -\frac{1 - 2i - 1}{1^2 + 1^2} + \frac{1}{m} = -\frac{-2i}{2} + \frac{1}{m} = i + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

b) On note tout d'abord que $m - n = 0 \Leftrightarrow i + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -i \Leftrightarrow m = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow m = i \Leftrightarrow M = A$. Comme $M \neq A$, on a donc $m - n \neq 0$ ou encore $M \neq N$. Ensuite,

$$\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \arg\left(\frac{m - n}{p - n}\right) = \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) [2\pi].$$

Soit m un nombre complexe tel que $m \neq 0$ et $m \neq a$,

$$\begin{aligned} \text{MNPQ est un rectangle} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\Leftrightarrow i + \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{m}}{|m|^2} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow m \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow M \in (Oy). \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M distincts de O et A tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle est l'axe (Oy) privé des points O et A .