BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'expression complexe de r_A est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = i + i(z - i) = iz + 1 + i$. Donc

$$d = ic + 1 + i = i(3i) + 1 + i = -3 + 1 + i = -2 + i.$$

$$\boxed{d = -2 + i.}$$

2) De même, l'expression complexe de r_B est $z' = b + e^{i\pi/2}(z - b) = 1 + i + i(z - 1 - i) = iz + 1 + i - i + 1 = iz + 2$ et l'expression complexe de r_O est $z' = e^{-i\pi/2}z = -iz$. Donc

$$g = id + 2 = i(-2 + i) + 2 = -2i - 1 + 2 = 1 - 2i \text{ et } h = -ic = -i(3i) = 3.$$

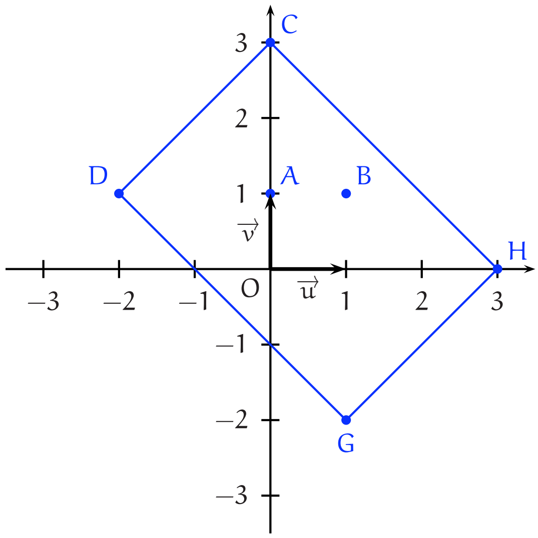
$$\boxed{g = 1 - 2i \text{ et } h = 3.}$$

3) Les coordonnées des points C, D, G et H sont : $C(0, 3)$, $D(-2, 1)$, $G(1, -2)$ et $H(3, 0)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont $(2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ sont $(2, 2)$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH}$ et par suite le quadrilatère CDGH est un parallélogramme. De plus, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DG}$ sont $(3, -3)$ et donc

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = 2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0.$$

On en déduit que $(DC) \perp (DG)$. Ainsi, le parallélogramme CDGH possède un angle droit et on a montré que

$$\boxed{\text{le quadrilatère CDGH est un rectangle.}}$$



Partie B

1) D'après la question 1 de la partie A, l'écriture complexe de la rotation r_A est $z' = iz + 1 + i$ et donc $n = im + 1 + i$.

2) $n-m = im+1+i-m = (-1+i)m+1+i$ et $p-q = -m+1+i+im = (-1+i)m+1+i$. Donc $n-m = p-q$ ou encore $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } MNPQ \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) $p-n = -m+1+i-im-1-i = -(1+i)m \neq 0$ (car $M \neq O$ et donc $m \neq 0$) puis $m-n = m-im-1-i = (1-i)m-(1+i)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{m-n}{p-n} &= \frac{(1-i)m-(1+i)}{-(1+i)m} = \frac{(1-i)m}{-(1+i)m} + \frac{-(1+i)}{-(1+i)m} = -\frac{1-i}{1+i} + \frac{1}{m} \\ &= -\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + \frac{1}{m} = -\frac{1-2i-1}{1^2+1^2} + \frac{1}{m} = -\frac{-2i}{2} + \frac{1}{m} = i + \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

b) On note tout d'abord que $m-n = 0 \Leftrightarrow i + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -i \Leftrightarrow m = -\frac{1}{i} \Leftrightarrow m = i \Leftrightarrow M = A$. Comme $M \neq A$, on a donc $m-n \neq 0$ ou encore $M \neq N$. Ensuite,

$$\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right) = \arg\left(i + \frac{1}{m}\right)\ [2\pi].$$

Soit m un nombre complexe tel que $m \neq 0$ et $m \neq a$,

$$\begin{aligned}MNPQ \text{ est un rectangle} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow i + \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{m}}{|m|^2} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow m \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow M \in (Oy).\end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M distincts de O et A tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle est l'axe (Oy) privé des points O et A.