

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A , G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O .

On note d , g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h .
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m . On appelle N l'image de M par r_A , P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O .

On note n , p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.
3. a) Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.