EXERCICE 2 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \ ; \quad b = -2 - i \ ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}.$$

a. Calculer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C' sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

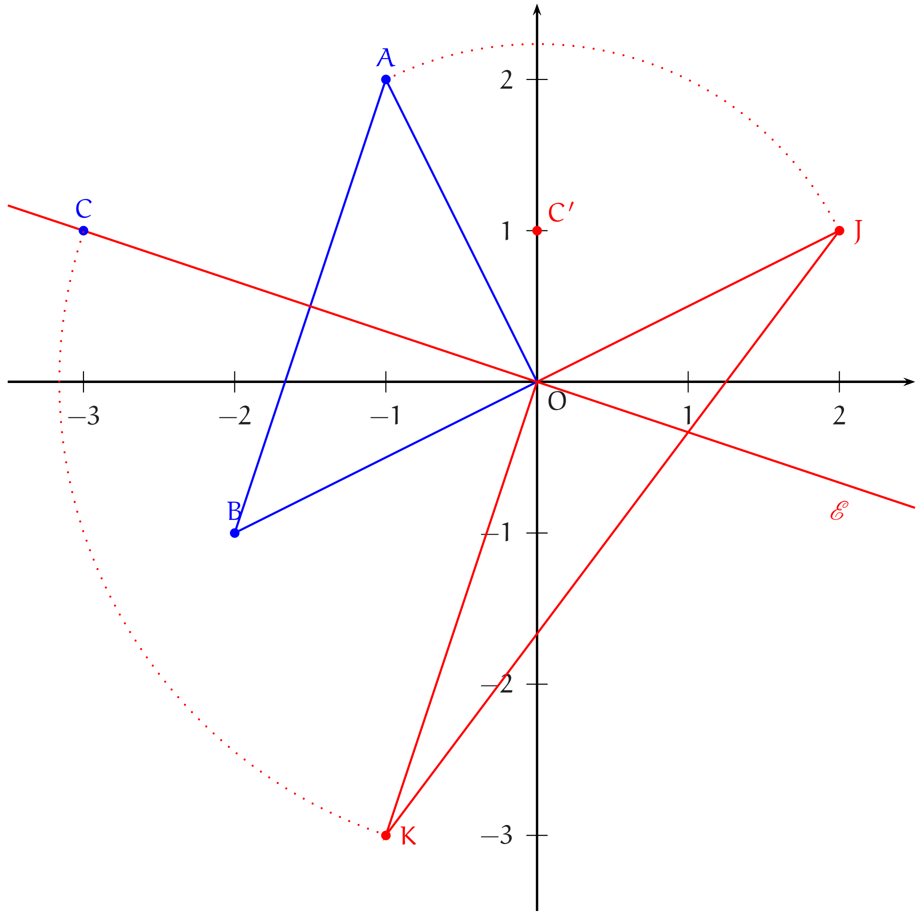
On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On note L le milieu de $[JK]$.

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 2

1) Graphique



2) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{-2-i}{-1+2i} = \dfrac{i(-1+2i)}{-1+2i} = i$. On en déduit que

- $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|b|}{|a|} = \left|\dfrac{b}{a}\right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Par suite, le triangle OAB est rectangle isocèle direct en O.

3) a)

$$c' = \frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i} = \frac{-2-i}{-1+2i} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{2+4i+i-2}{(-1)^2+2^2} = i.$$

Le point $C' = f(C)$ a donc pour coordonnées $(0, 1)$.

b) Soit M un point du plan distincts de B d'affixe z.

$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\Leftrightarrow \frac{|z+1-2i|}{|z+2+i|} = 1 \Leftrightarrow |z-(-1+2i)| = |z-(-2-i)| \text{ (et } z \neq -2-i) \\ &\Leftrightarrow AM = BM \text{ (et } M \neq B) \Leftrightarrow AM = BM \text{ (car si } M = B, \text{ alors } AM \neq BM) \\ &\Leftrightarrow M \in \text{med}[AB]. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$. On peut en déterminer une équation :

$$\begin{aligned} M \in \text{med}[AB] &\Leftrightarrow AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow 2x + 6y = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est la droite d'équation $x + 3y = 0$.

c) $x_O + 3y_O = 0 = 0 = 0$. Donc $O \in \mathscr{E}$. $x_C + 3y_C = -3 + 3 = 0$. Donc $C \in \mathscr{E}$.

4) • $z_J = e^{-i\pi/2} z_A = -i(-1 + 2i) = 2 + i$ et $z_K = e^{i\pi/2} z_C = i(-3 + i) = -1 - 3i$.

• Le milieu L du segment [JK] a pour affixe $z_L = \dfrac{z_J + z_K}{2} = \dfrac{2 + i - 1 - 3i}{2} = \dfrac{1}{2} - i$.

• La médiane issue de O du triangle OJK est la droite (OL). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OL}$ sont $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-2, -1)$.

$$\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \times (-2) + (-1) \times (-1) = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ou encore la droite (OL) est perpendiculaire à la droite (AC). Ainsi, la droite (OL) est également la hauteur issue de O du triangle OAC.

