EXERCICE 2 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \ ; \quad b = -2 - i \ ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer $\frac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}.$$

a. Calculer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C' sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note L le milieu de $[JK]$.

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.