**EXERCICE 2 (5 points )**

**(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On note $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

On considère le points $A$, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point $A_1$ d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de $z_A$.

On note enfin $B$ l'image du point $A_1$ par la rotation $r$ et $z_B$ l'affixe du point $B$.

**1.** **a.** Écrire le nombre complexe $z_A$ sous forme exponentielle, puis placer les points $A$ et $A_1$, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

**b.** Vérifier que $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe $z_B$ sous forme algébrique.
Placer alors le point $B$ dans le même repère.

**2.** On considère le vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = \dfrac{\pi}{12}$ et la droite $\Delta$ passant par $O$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

**a.** Démontrer que le triangle $OAB$ est rectangle isocèle en $O$.

**b.** Tracer la droite $\Delta$, puis démontrer que $\Delta$ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
En déduire que les points $A$ et $B$ sont symétriques par rapport à la droite $\Delta$.

**3.** On note $B_1$ le symétrique de $B$ par rapport à l'axe $(O; \overrightarrow{u})$ et $B'$ l'image de $B_1$ par la rotation $r$.
Démontrer que $B' = A$.

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

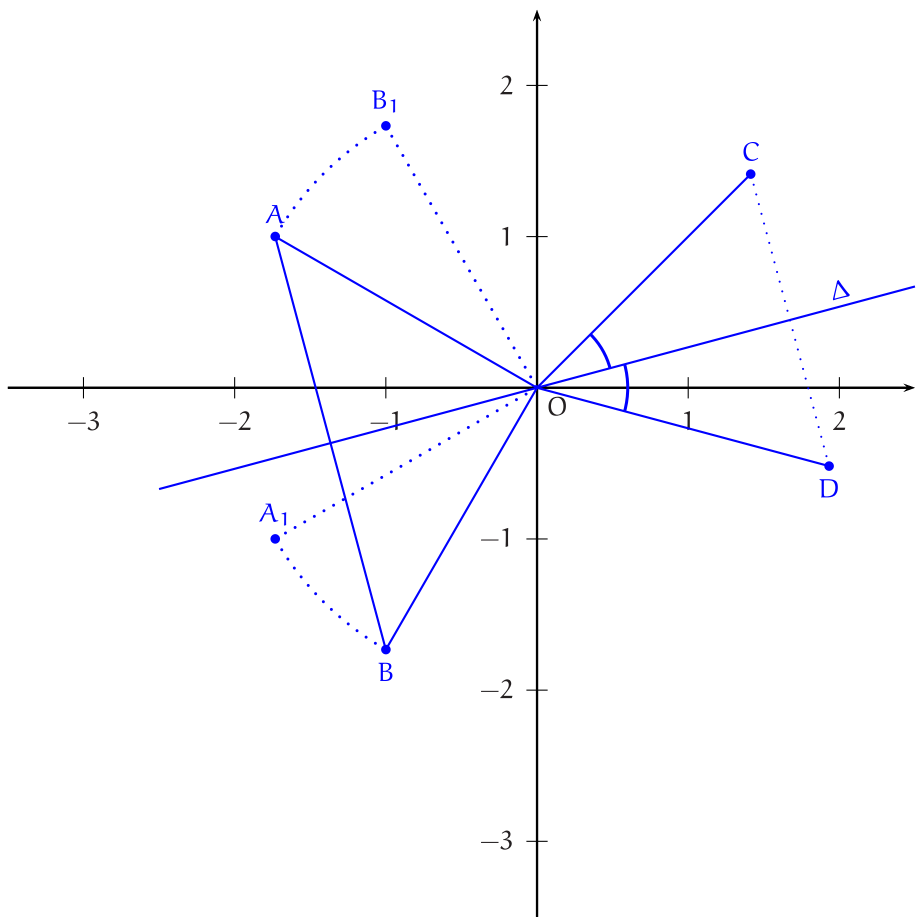
Soit $C$ le point d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$ et $D$ le symétrique de $C$ par rapport à la droite $\Delta$.
Construire les points $C$ et $D$, puis calculer l'affixe du point $D$.

**EXERCICE 2**

**1) a)** $|z_A| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ puis

$$z_A = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

**Graphique**




**b)** $z_{A_1} = \overline{\left(2e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2\overline{\left(e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ puis

$$z_B = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}}\left(z_{A_1} - z_O\right) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ensuite,

$$z_B = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.}$$

**2) a)** $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)} = e^{-\dfrac{9i\pi}{6}} = e^{-\frac{3i\pi}{2}} e^{i\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right)} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. On en déduit que

- $\dfrac{OB}{OA} = \dfrac{|z_B|}{|z_A|} = \left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Finalement, le triangle $OAB$ est rectangle isocèle en $O$.

**b)** L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$ est $e^{\frac{i\pi}{12}}$ puis

- $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{6}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right) = \arg\left(\dfrac{2e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{12}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Donc, $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}\right)$. Ceci montre que la droite $\Delta$ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

**3)** $z_{B_1} = \overline{\left(2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2\overline{\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$z_{B'} = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}}\left(z_{B_1} - z_O\right) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = z_A,$$

et donc $B' = A$.

**4)** $|z_C| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ puis

$$z_C = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Notons $s$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta$. Le point $O$ appartient à la droite $\Delta$. Donc

$$OD = s(O)s(C) = OC = |z_C| = 2.$$

Posons alors $z_D = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}\right) = \theta\ [2\pi]$. Puisque D est le symétrique de C par rapport à la droite $\Delta$, la droite $\Delta$ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$. Mais alors $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD}\right)$. Or,

- $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$,
- $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OD}\right) = \left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{\pi}{12} + \theta\ [2\pi]$.

Par suite, $-\dfrac{\pi}{12} + \theta = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou encore $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$ ou enfin $\theta = -\dfrac{\pi}{12}\ [2\pi]$. Finalement,

$$\boxed{z_D = 2e^{-\frac{i\pi}{12}}.}$$