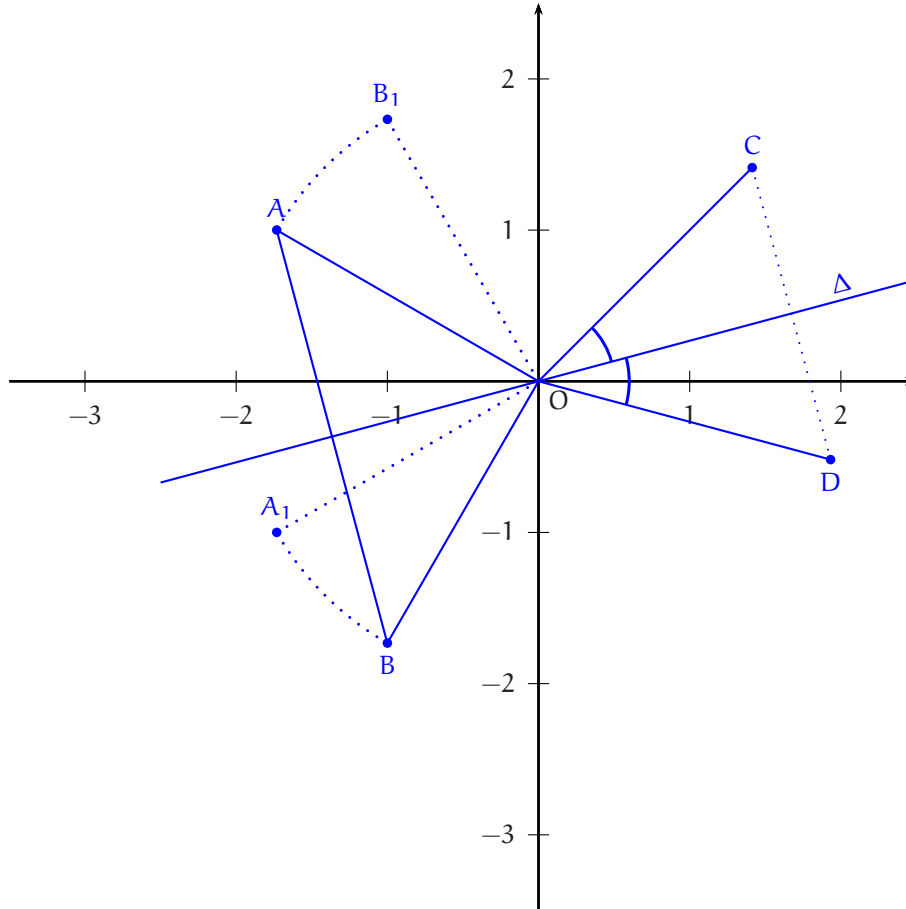


EXERCICE 2

1) a) $|z_A| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ puis

$$z_A = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

Graphique



b) $z_{A_1} = \overline{z_A} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ puis

$$z_B = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}} (z_{A_1} - z_O) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6})} = 2e^{-\frac{4i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}.$$

Ensuite,

$$z_B = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

$$z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}.$$

2) a) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}} = e^{i(-\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{6})} = e^{-\frac{9i\pi}{6}} = e^{-\frac{3i\pi}{2}} = e^{i(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi)} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$. On en déduit que

- $\frac{OB}{OA} = \frac{|z_B|}{|z_A|} = \left| \frac{z_B}{z_A} \right| = |i| = 1$ et donc $OA = OB$.
- $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg \left(\frac{z_B}{z_A} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Finalement, le triangle OAB est rectangle isocèle en O .

b) L'affixe du vecteur \vec{w} est $e^{\frac{i\pi}{12}}$ puis

- $(\vec{OA}, \vec{w}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{w}}}{z_A}\right) = \arg\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{6}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$
- $(\vec{w}, \vec{OB}) = \arg\left(\frac{z_B}{z_{\vec{w}}}\right) = \arg\left(\frac{2e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{12}}}\right) = \arg\left(e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right)}\right) = \arg\left(e^{-\frac{9i\pi}{12}}\right) = \arg\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) = -\frac{3\pi}{4} [2\pi].$

Donc, $(\vec{OA}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{OB})$. Ceci montre que la droite Δ est la bissectrice de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) .

3) $z_{B_1} = \overline{\left(2e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2\overline{\left(e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$z_{B'} = z_O + e^{\frac{i\pi}{6}}(z_{B_1} - z_O) = e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = z_A,$$

et donc $B' = A$.

4) $|z_C| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ puis

$$z_C = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Notons s la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ . Le point O appartient à la droite Δ . Donc

$$OD = s(O)s(C) = OC = |z_C| = 2.$$

Posons alors $z_D = 2e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors $(\vec{u}, \vec{OD}) = \theta [2\pi]$. Puisque D est le symétrique de C par rapport à la droite Δ , la droite Δ est la bissectrice de l'angle (\vec{OC}, \vec{OD}) . Mais alors $(\vec{OC}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{OD})$. Or,

- $(\vec{OC}, \vec{w}) = (\vec{OC}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w}) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} [2\pi],$
- $(\vec{w}, \vec{OD}) = (\vec{w}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{OD}) = -\frac{\pi}{12} + \theta [2\pi].$

Par suite, $-\frac{\pi}{12} + \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} [2\pi]$ ou encore $\theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} [2\pi]$ ou enfin $\theta = -\frac{\pi}{12} [2\pi]$. Finalement,

$$z_D = 2e^{-\frac{i\pi}{12}}.$$