

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1 , fait correspondre le point M' d'affixe $\frac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite \mathcal{D} d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

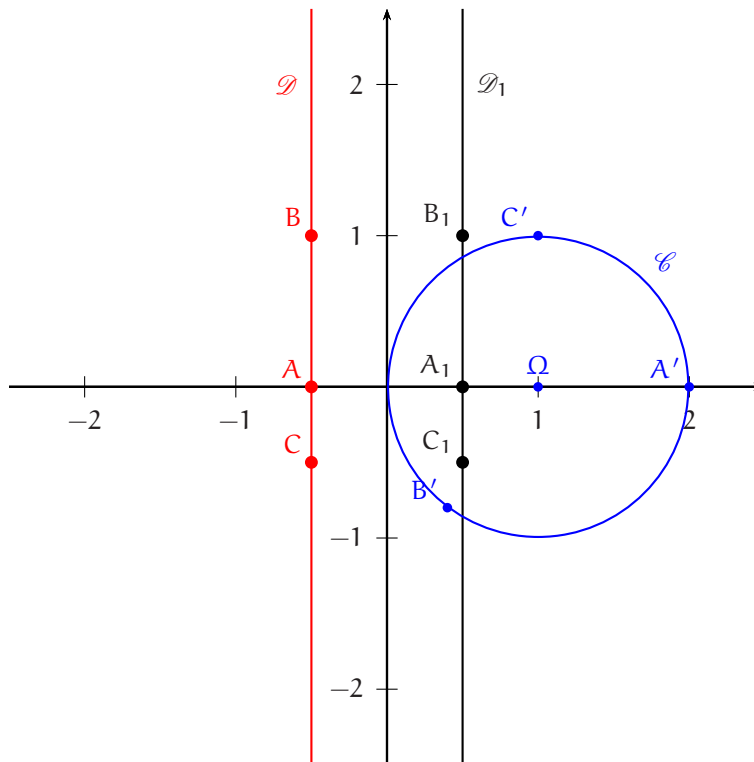
1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{2}$, $z_B = -\frac{1}{2} + i$ et $z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
 - a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
 - b. Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer les points A', B' et C' sur la figure.
 - c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M_1 d'affixe $z + 1$.
 - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .
 - b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1 , images respectives par g de A, B et C et tracer la droite \mathcal{D}_1 , image de la droite \mathcal{D} par g .
 - c. Démontrer que \mathcal{D}_1 est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$.
3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.
 - a. Justifier que $h(A_1) = A', h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
 - b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \iff |z - 1| = |z|.$$

- c. En déduire que l'image par h de la droite \mathcal{D}_1 est incluse dans un cercle \mathcal{C} dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite \mathcal{D}_1 est le cercle \mathcal{C} privé de O .
4. Déterminer l'image par l'application f de la droite \mathcal{D} .

EXERCICE 4

1) a) Graphique.



$$\text{b) } \bullet z_{A'} = \frac{1}{z_A + 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

$$\bullet z_{B'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + i + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + i} = \frac{2}{1 + 2i} = \frac{2(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{2 - 4i}{1^2 + 2^2} = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

$$\bullet z_{C'} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + 1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{1^2 + 1^2} = 1 + i.$$

c) Les points A' , B' et C' ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$, $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ et $(1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées $(-1, 1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, alors $-k = -\frac{8}{5}$ et aussi $k = -\frac{4}{5}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires ou encore

les points A' , B' et C' ne sont pas alignés.

2) a) On sait que g est la translation de vecteur $\vec{w}(1, 0)$.

b) Les points A , B et C sont trois points deux à deux distincts de la droite \mathcal{D} et donc $\mathcal{D} = (AB)$ par exemple. On sait que l'image d'une droite par une translation est une droite. Par suite, \mathcal{D}_1 est la droite passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathcal{D}_1 = (A_1B_1)$. Voir graphique.

c) \mathcal{D}_1 est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$ est l'ensemble des points M à égale distance des points $O(0, 0)$ et $\Omega(1, 0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O, \Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ ou enfin la droite \mathcal{D}_1 .

3) a) A_1 , B_1 et C_1 sont distincts de O . Donc $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

$$z_{h(A_1)} = \frac{1}{z_{A_1}} = \frac{1}{z_A + 1} = z_{A'} \text{ et donc } h(A_1) = A'. \text{ De même, } h(B_1) = B' \text{ et } h(C_1) = C'.$$

b) Soit z un nombre complexe non nul.

$$\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1-z}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |-(z-1)| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|.$$

c) Soit M_1 un point de \mathcal{D}_1 dont l'affixe est notée z_1 . M_1 est distinct de O et donc $h(M_1)$ existe. De plus, $|z_1 - 1| = |z_1|$ d'après la question 2)c) et donc $\left| \frac{1}{z_1} - 1 \right| = 1$ d'après la question 3)b). $\frac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc $\Omega h(M_1) = 1$ (où $\Omega(1,0)$). Ainsi, le point $h(M_1)$ est appartient au cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.

4) $f(\mathcal{D}) = h(g(\mathcal{D})) = h(\mathcal{D}_1) = \mathcal{C} \setminus \{O\}$.

$$f(\mathcal{D}) = \mathcal{C} \setminus \{O\}.$$