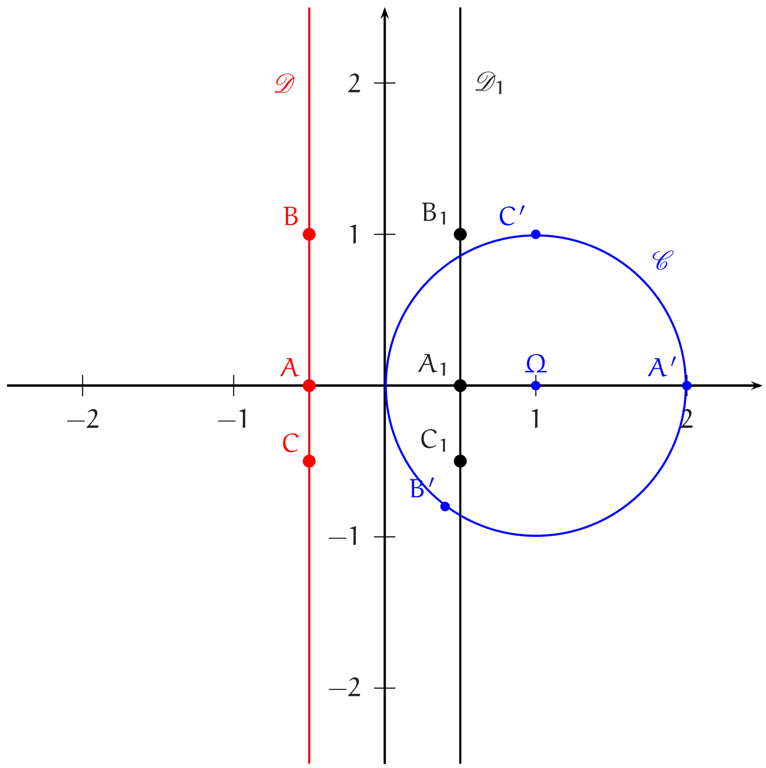
EXERCICE 4

1) a) Graphique.



b) • $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A + 1} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{1}{1/2} = 2.$

• $z_{B'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + i + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + i} = \dfrac{2}{1 + 2i} = \dfrac{2(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \dfrac{2 - 4i}{1^2 + 2^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i.$

• $z_{C'} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i} = \dfrac{2}{1 - i} = \dfrac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{2(1 + i)}{1^2 + 1^2} = 1 + i.$

c) Les points A', B' et C' ont pour coordonnées respectives $(2, 0)$, $\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ et $(1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{8}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées $(-1, 1)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$, alors $-k = -\dfrac{8}{5}$ et aussi $k = -\dfrac{4}{5}$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points } A', B' \text{ et } C' \text{ ne sont pas alignés.}}$$

2) a) On sait que g est la translation de vecteur $\overrightarrow{w}(1, 0)$.

b) Les points A, B et C sont trois points deux à deux distincts de la droite $\mathscr{D}$ et donc $\mathscr{D} = (AB)$ par exemple. On sait que l'image d'une droite par une translation est une droite. Par suite, $\mathscr{D}_1$ est la droite passant par $A_1 = g(A)$ et $B_1 = g(B)$ ou encore $\mathscr{D}_1 = (A_1B_1)$. Voir graphique.

c) $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$ est l'ensemble des points M à égale distance des points $O(0, 0)$ et $\Omega(1, 0)$. Cet ensemble est la médiatrice du segment $[O, \Omega]$ ou encore la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ ou enfin la droite $\mathscr{D}_1$.

3) a) A_1, B_1 et C_1 sont distincts de O. Donc $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ existent.

$z_{h(A_1)} = \dfrac{1}{z_{A_1}} = \dfrac{1}{z_A + 1} = z'_A$ et donc $h(A_1) = A'$. De même, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Soit z un nombre complexe non nul.

$$\left|\frac{1}{z}-1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |-(z-1)| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|.$$

c) Soit M_1 un point de $\mathscr{D}_1$ dont l'affixe est notée z_1. M_1 est distinct de O et donc $h(M_1)$ existe. De plus, $|z_1 - 1| = |z_1|$ d'après la question 2)c) et donc $\left|\frac{1}{z_1}-1\right| = 1$ d'après la question 3)b). $\frac{1}{z_1}$ est l'affixe de $h(M_1)$ et donc $\Omega h(M_1) = 1$ (où $\Omega(1,0)$). Ainsi, le point $h(M_1)$ est appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1.

4) $f(\mathscr{D}) = h\left(g\left(\mathscr{D}\right)\right) = h\left(\mathscr{D}_1\right) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$.

$$\boxed{f(\mathscr{D}) = \mathscr{C} \setminus \{O\}.}$$

